

## A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie, 2015

CLASA a IX-a, ziua a doua

9.5. Să se arate, că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c$ , dacă  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , atunci polinomul  $P(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$  nu se divide la polinomul  $Q(X) = X^3 - (a + b)X^2 + abX$ .

9.6. Un pătrat de dimensiuni  $2016 \times 2016$  este împărțit în pătrățele  $1 \times 1$ . Pe diagonala ce pornește din colțul stâng-jos sunt puse 2016 fise, câte una pe fiecare pătrățel. Fie  $k$  un număr natural,  $2 \leq k \leq 2015$ . La o mutare, se iau oricare  $k$  fise și se deplasează cu un pătrățel mai jos. Numărul  $k$  se va numi *număr bun*, dacă după un anumit număr de mutări toate fisele vor ajunge pe linia de jos a pătratului. Să se afle cel mai mic număr bun.

9.7. Fie paralelogramul  $ABCD$  cu laturile  $AB = CD = a$ ;  $AD = BC = b$  și  $m(\angle A) = 30^\circ$ . O dreaptă ce trece prin  $C$  intersectează dreptele  $AB$  și  $AD$  în exteriorul paralelogramului în punctele  $P$  și, respectiv,  $Q$ . Să se demonstreze că aria paralelogramului nu depășește  $\frac{1}{8}(a \cdot AQ + b \cdot AP)$ .

9.8. Să se afle toate perechile de numere reale  $(x, y)$ , care satisfac inecuația

$$(x + y^2)(y^2 - 4y + 5) \leq 2y\sqrt{x}.$$

Timp alocat – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte

MULT SUCCES!

## 59-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 27 февраля – 2 марта 2015

IX класс, второй день

9.5. Показать, что каковы бы ни были действительные числа  $a, b, c$ , если  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , то многочлен  $P(X) = X^4 + aX^3 + bX + c$  не делится на многочлен  $Q(X) = X^3 - (a + b)X^2 + abX$ .

9.6. Квадрат  $2016 \times 2016$  разделен на квадратики  $1 \times 1$ . На диагонали, которая начинается в левый нижний угол, расположены 2016 фишек, по одной на каждый квадратик. Пусть  $k$  натуральное число,  $2 \leq k \leq 2015$ . При одном ходе, берутся любые  $k$  фишек и передвигаются вниз на один квадратик. Число  $k$  назовем *хорошим*, если после определенного числа ходов все фишки окажутся на нижней линии квадрата. Найти наименьшее хорошее число.

9.7. В параллелограмме  $ABCD$   $AB = CD = a$ ;  $AD = BC = b$  и  $m(\angle A) = 30^\circ$ . Прямая, которая проходит через  $C$ , пересекает прямые  $AB$  и  $AD$  вне параллелограмма в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Доказать, что площадь параллелограмма не превосходит  $\frac{1}{8}(a \cdot AQ + b \cdot AP)$ .

9.8. Найти все пары действительных чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющие неравенству

$$(x + y^2)(y^2 - 4y + 5) \leq 2y\sqrt{x}.$$

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!