

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA*Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015*

Clasa a VIII-a, ziua a doua

8.5. Se știe, că ecuația $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2015| = y(y+1)$ are o singură soluție (x_0, y_0) cu $y_0 > 0$. Demonstrați, că x_0 și y_0 sunt numere naturale și că numărul

$A = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 1$ este pătrat perfect.

8.6. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\frac{x-1}{2014} + \frac{x-2}{2013} + \frac{x-3}{2012} + \dots + \frac{x-2012}{3} + \frac{x-2013}{2} + \frac{x-2014}{1} = \frac{2014 \cdot x}{2015}.$$

8.7. În triunghiul ABC punctul D este mijlocul laturii BC . Dreapta dusă prin vârful B și mijlocul segmentului AD intersectează latura AC în punctul E . Dreapta dusă prin punctul C paralel cu dreapta AD intersectează prelungirea laturii BA în punctul K . Demonstrați, că punctele D , E și K sunt coliniare.

8.8. Pentru orice numere reale strict pozitive a și b se consideră expresia

$$E(a, b) = \left(8 + \frac{1}{a}\right) \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{8}\right).$$

a) Demonstrați, că $E(a, b) > \frac{113}{8}$;

b) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ și valorile a și b pentru care se obține această valoare minimă.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА*Кишинэу, 27 февраля – 2 марта 2015*

VIII класс, второй день

8.5. Известно, что уравнение $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2015| = y(y+1)$ имеет одно единственное решение (x_0, y_0) , где $y_0 > 0$. Докажите, что x_0 и y_0 являются натуральными числами и что число $A = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 1$ является полным квадратом.

8.6. Решите на множестве целых чисел уравнение:

$$\frac{x-1}{2014} + \frac{x-2}{2013} + \frac{x-3}{2012} + \dots + \frac{x-2012}{3} + \frac{x-2013}{2} + \frac{x-2014}{1} = \frac{2014 \cdot x}{2015}.$$

8.7. В треугольнике ABC точка D является серединой стороны BC . Прямая проведенная через вершину B и середину отрезка AD пересекает сторону AC в точке E . Прямая проведенная через точку C параллельно прямой AD пересекает продолжение стороны BA в точке K . Докажите, что D , E и K являются коллинеарными точками.

8.8. Для всех действительных строго положительных чисел a и b дано выражение

$$E(a, b) = \left(8 + \frac{1}{a}\right) \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{1}{8}\right).$$

a) Докажите, что $E(a, b) > \frac{113}{8}$;

b) Определите наименьшее значение выражения $E(a, b)$ и значение a и b для которых выражение принимает это наименьшее значение.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!