

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a XII-a, ziua a doua

12.5. Arătați ca valoarea integralei $\int_1^{2016} x[x]dx$ este un număr întreg divizibil cu 2015. Prin $[x]$ se notează partea întreagă a numărului real x .

12.6. Baza piramidei $VABC$ este triunghiul echilateral ABC cu latura de $9cm$, iar înălțimea piramidei este de $6 cm$. Determinați valoarea minimă a razei sferei, ce conține vîrfurile piramidei.

12.7. Fie $f: [0,1] \rightarrow R$ o funcție derivabilă cu derivată continuă astfel încît $\int_0^1 x^4 f(x^2) dx + \int_0^1 xf(x)f'(x)dx = \frac{5}{32}$. Determinați f , știind că $f(1) = \frac{1}{2}$.

12.8. Fie $A_k = \begin{pmatrix} C_{2016}^{2k} & C_{2016}^{2k-1} \\ -C_{2016}^{2k-1} & C_{2016}^{2k} \end{pmatrix}$, $1 \leq k \leq 1008, k \in \mathbb{N}$, iar $X = \sum_{k=1}^{1008} (-1)^{k-1} A_k$.

Calculați $\det(I_2 - X)$, unde I_2 este matricea unitate de ordinul doi.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 26 февраля – 29 февраля 2016

ХІІ класс, второй день

12.5. Покажите, что значение интеграла $\int_1^{2016} x[x]dx$ является целым числом кратное 2015. Через $[x]$ обозначается целая часть действительного числа x .

12.6. Основанием треугольной пирамиды $VABC$ является равносторонний треугольник ABC со стороной в 9см, а высота пирамиды равна 6см. Найдите наименьшее возможное значение радиуса шара, поверхность которого содержит вершины пирамиды.

12.7. Пусть $f: [0,1] \rightarrow R$ дифференцируемая функция с непрерывной производной, удовлетворяющая условию $\int_0^1 x^4 f(x^2) dx + \int_0^1 xf(x)f'(x)dx = \frac{5}{32}$. Найдите f , если известно, что $f(1) = \frac{1}{2}$.

12.8. Пусть $A_k = \begin{pmatrix} C_{2016}^{2k} & C_{2016}^{2k-1} \\ -C_{2016}^{2k-1} & C_{2016}^{2k} \end{pmatrix}$, $1 \leq k \leq 1008, k \in \mathbb{N}$, и $X = \sum_{k=1}^{1008} (-1)^{k-1} A_k$. Найдите $\det(I_2 - X)$, где I_2 единичная матрица второго порядка.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!