

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

Clasa a XII-a, prima zi

12.1 a) Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ este adevărată inegalitatea $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$.

b) Fie date funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Să se calculeze aria figurii mărginite de graficele funcțiilor f și g și de dreptele $x=0$, $x=1$.

12.2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, și $A_n = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2n+1 \end{pmatrix}$. Dacă $a_n = \frac{\det A_n}{2^{n-1} n!}$, atunci să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

12.3. Baza unei piramide patrulatere este un patrulater convex, două laturi ale căruia sunt de lungimi egale cu 8cm, iar altele - de lungimi egale cu 6cm. Înălțimea piramidei are lungimea egală cu 6cm, iar fețele laterale formează cu planul bazei unghiuri cu măsura de 60° . Să se determine volumul piramidei.

12.4. Să se determine funcțiile continue $f: \left[0, \frac{3}{2}\right] \rightarrow (0, \infty)$ cu proprietatea

$$4 \int_0^{3/2} f(x) dx + 125 \int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + f(x)}} = 108.$$

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

Timp alocat - 4 ore astronomice

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 28 февраля – 3 марта 2014

XII класс, первый день

12.1. a) Доказать, что $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

b) Даны функции $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \cos x$, $g(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций f , g и прямыми $x=0$, $x=1$.

12.2. Пусть $A_n = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2n+1 \end{pmatrix}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Если $a_n = \frac{\det A_n}{2^{n-1} n!}$, найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

12.3. В основании четырехугольной пирамиды лежит выпуклый четырехугольник, две стороны которого равны 8см, а две другие равны 6см. Высота пирамиды равна 6см. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60° . Найдите объем пирамиды.

12.4. Найти все непрерывные функции $f: \left[0, \frac{3}{2}\right] \rightarrow (0, \infty)$, удовлетворяющие условию

$$4 \int_0^{3/2} f(x) dx + 125 \int_0^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + f(x)}} = 108.$$

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!