

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a XI-a, prima zi

11.1. Arătați că, pentru orice numere naturale nenule r și n , există o progresie aritmetică cu rația r , formată din $2n+1$ termeni naturali, pentru care suma pătratelor primilor $n+1$ termeni coincide cu suma pătratelor ultimilor n termeni. Câte astfel de progresii au primul termen egal cu 2016?

11.2. Se consideră mulțimea M a tetraedrelor $ABCD$ ale căror patru muchii $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ și $|DB|=d$ satisfac relația $(a+b+c)\sqrt{d}=1$. Determinați toate tetraedrele, cu produsul lungimilor tuturor muchiilor minim, din mulțimea tetraedrelor de volum maxim din M .

11.3. Fie $n \in \mathbf{N}^*$, $S = \{1, 2, 3, \dots, 4^n\}$, $s \in S$ și $S_0 = S \setminus \{s\}$. Șirul finit $S_0, S_1, \dots, S_r$ se numește “magic” dacă $S_r = \emptyset$ și pentru orice k , $1 \leq k \leq r$, există trei elemente distincte j_k, l_k, m_k în mulțimea S_{k-1} , ce verifică proprietățile $S_k = S_{k-1} \setminus \{j_k, l_k, m_k\}$, $|j_k - l_k| = 1$, $|l_k - m_k| = 2^n$ și $\min\{j_k, l_k\}$ nu e divizibil cu 2^n . Arătați că pentru orice $s \in S$ există cel puțin un șir finit “magic”.

11.4. Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, astfel încât $f(f(u)) - 1 = (u-1)\left(\frac{uf(u)}{2} - 1\right)$, $\forall u \in \mathbf{R}$. Determinați mulțimea valorilor posibile ale expresiei $f(2)$.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 26 – 29 февраля 2016

XI класс, первый день

11.1. Докажите что, для любых натуральных ненулевых чисел r и n , существует арифметическая прогрессия с разностью r , состоящая из $2n+1$ натуральных чисел, для которых сумма квадратов первых $n+1$ членов равна сумме квадратов последних n членов. Сколько прогрессий такого типа имеют первый член равен 2016?

11.2. Пусть множество M всех тетраэдров $ABCD$ у которых есть четыре рёбер $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ и $|DB|=d$ которые проверяют равенство $(a+b+c)\sqrt{d}=1$. Найдите всех тетраэдров, с минимальным произведением длин всех рёбер, из множества тетраэдров с максимальным объёмом из M .

11.3. Пусть $n \in \mathbf{N}^*$, $S = \{1, 2, 3, \dots, 4^n\}$, $s \in S$ и $S_0 = S \setminus \{s\}$. Последовательность $S_0, S_1, \dots, S_r$ называется “волшебной” если $S_r = \emptyset$ и для любого k , $1 \leq k \leq r$, есть три различные элементы j_k, l_k, m_k в множество S_{k-1} , которые проверяют следующие свойства: $S_k = S_{k-1} \setminus \{j_k, l_k, m_k\}$, $|j_k - l_k| = 1$, $|l_k - m_k| = 2^n$ и $\min\{j_k, l_k\}$ не делится на 2^n . Докажите что, для любого $s \in S$ есть хотя бы одна последовательность “волшебная”.

11.4. Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, где $f(f(u)) - 1 = (u-1)\left(\frac{uf(u)}{2} - 1\right)$, $\forall u \in \mathbf{R}$. Найдите множество возможных значений для $f(2)$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!