

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a XI-a, prima zi

11.1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x-1) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 1$ pentru $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}^*$ considerăm funcția $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) (\sin x)$. Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_k(x)}{x}$.

11.2. Demonstrați că pentru orice numere reale $x \geq 0, y \geq 0$ are loc inegalitatea:

$$e^{x+y-2} \geq \frac{x^2+y^2}{4}. \text{ Când are loc egalitatea?}$$

11.3. Fie $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ și $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Arătați că pentru orice număr natural impar n are loc egalitatea: $\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = 0$.

11.4. Bisectoarea unghiului BCA a triunghiului ABC intersectează repetat cercul circumscris acestui triunghi în punctul R și intersectează mediatoarele segmentelor AC și BC în punctele P și Q corespunzător. Punctele K și L sunt mijloacele segmentelor AC și BC corespunzător. Demonstrați că ariile triunghiurilor RPK și RQL sînt egale.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 27 февраля – 2 марта 2015

XI класс, первый день

11.1. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x-1) = -4x^3 + 12x^2 - 9x + 1$ для $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}^*$ рассматриваем функцию $g_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_k(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori}} \right) (\sin x)$. Вычислите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_k(x)}{x}$.

11.2. Докажите, что для любых действительных чисел $x \geq 0, y \geq 0$ выполняется неравенство:

$$e^{x+y-2} \geq \frac{x^2+y^2}{4}. \text{ Когда выполняется равенство?}$$

11.3. Пусть $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ и $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Докажите, что для любого нечетного натурального числа n имеет место равенство $\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = 0$.

11.4. Бисектриса угла BCA треугольника ABC пересекает его описанную окружность вторично в точке R и пересекает серединные перпендикуляры к сторонам AC и BC в точках P и Q соответственно. Точки K и L – середины отрезков AC и BC соответственно. Докажите, что площади треугольников RPK и RQL равны.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!