

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a X-a, ziua a II-a

10.5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea: există $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ astfel încât $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2016 \text{ ori}}\right)(x) = ax - (a - 1)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Arătați că $f(1) = 1$.

10.6. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$, unde a este parametru real.

10.7. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a > 1, b > 1, c > 1$. Demonstrați inegalitatea:

$$\log_{ab^5c^5} a + \log_{bc^5a^5} b + \log_{ca^5b^5} c \geq \frac{3}{11}.$$

10.8. În triunghiul ABC este înscris un cerc. Laturile triunghiului BC, CA, AB sînt tangente cercului în punctele A_1, B_1, C_1 corespunzător. Segmentul AA_1 intersectează repetat cercul înscris în punctul Q . Dreapta l trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta BC . Dreptele A_1B_1 și A_1C_1 intersectează dreapta l în punctele R și P corespunzător. Demonstrați, că $\angle PQR \equiv \angle B_1QC_1$.

Timp alocat - 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 26 – 29 февраля 2016

X класс, второй день

10.5. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция со свойством: существует $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ так что для любого $x \in \mathbb{R}$, имеет место равенство $\left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{2016}\right)(x) = ax - (a - 1)$. Покажите что $f(1) = 1$.

10.6. Решите в действительных числах уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$, где a – действительный параметр.

10.7. Докажите неравенство $\log_{ab^5c^5} a + \log_{bc^5a^5} b + \log_{ca^5b^5} c \geq \frac{3}{11}$, где $a, b, c \in \mathbb{R}, a > 1, b > 1, c > 1$.

10.8. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезок AA_1 вторично пересекает вписанную окружность в точке Q . Прямая l параллельна BC и проходит через A . Прямые A_1B_1 и A_1C_1 пересекают l в точках R и P соответственно. Докажите, что $\angle PQR \equiv \angle B_1QC_1$.

Время выполнения – 4 астрономических часа

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!