

A 60-a OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ DE MATEMATICĂ

Chişinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a X-a, prima zi

10.1 Numere reale x_1, x_2, x_3, x_4 satisfac $x_i > 12,5$, $(1 \leq i \leq 4)$. Să se afle valoarea minimă posibilă a expresiei:

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^2}{2x_2 - 25} + \frac{x_2^2}{2x_3 - 25} + \frac{x_3^2}{2x_4 - 25} + \frac{x_4^2}{2x_1 - 25}.$$

10.2 Un dreptunghi cu laturile de lungime 2017 și 2016 a fost divizat în pătrățele cu latura 1 obținându-se astfel 2017 coloane și 2016 linii. Fiecare pătrățel 1×1 a fost colorat fie cu alb fie cu negru astfel că fiecare pătrățel negru ce nu se află la margine are exact 7 pătrățele albe din cele 8 pătrățele vecine și fiecare pătrățel alb ce nu se află la margine are exact 2 pătrățele negre din cele 8 pătrățele vecine. Să se demonstreze că prima și ultima coloană au aceleași număr de pătrățele negre.

10.3 Să se afle cel mai mic număr natural n cu proprietatea că orice submulțime B din n elemente a mulțimii $A = \{1; 2; \dots; 2016\}$ conține cel puțin două elemente a, b astfel că $a = 3^k \cdot b$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

10.4 Fie ABC triunghi în care $a \leq b \leq c$ (ca de obicei $a = BC, b = AC, c = AB$). Să se demonstreze echivalența următoarelor afirmații:

1) în interiorul triunghiului ABC există un punct X cu proprietatea că segmentele tăiate de laturile triunghiului pe dreptele ce trec prin X paralel la aceste laturi sunt congruente;

2) $bc < a(b + c)$.

Timp de lucru – 4 ore astronomice.

Fiecare problemă se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

60-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинёв, 26 февраля – 29 февраля 2016

X класс, первый день

10.1 Действительные числа x_1, x_2, x_3, x_4 удовлетворяют $x_i > 12,5$, $(1 \leq i \leq 4)$. Найти наименьшее возможное значение выражения:

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1^2}{2x_2 - 25} + \frac{x_2^2}{2x_3 - 25} + \frac{x_3^2}{2x_4 - 25} + \frac{x_4^2}{2x_1 - 25}.$$

10.2 Прямоугольник со сторонами длиной 2017 и 2016 был разделён на квадратики со стороной 1 получив таким образом 2017 столбцов и 2016 строк. Каждый квадратик 1×1 был покрашен либо в белый, либо в чёрный цвет так, что любой чёрный квадратик не лежащий на окраине имеет точно 7 белых квадратиков из тех 8-ми соседних квадратиков и любой белый квадратик не лежащий на окраине имеет точно 2 чёрных квадратика из тех 8-ми соседних квадратиков. Доказать, что первый и последний столбец имеют одинаковое число чёрных квадратиков.

10.3 Найти наименьшее натуральное число n такое, что любое подмножество B из n элементов множества $A = \{1; 2; \dots; 2016\}$ содержит хотя бы два элемента a, b со свойством $a = 3^k \cdot b$, где $k \in \mathbb{N}^*$.

10.4 Пусть ABC треугольник в котором $a \leq b \leq c$ (как обычно $a = BC, b = AC, c = AB$). Доказать, эквивалентность следующих утверждений:

1) внутри треугольника ABC существует точка X такая, что отрезки отсеченные сторонами треугольника на прямых проходящих через X параллельно этим сторонам конгруэнтны;

2) $bc < a(b + c)$.

Время работы – 4 астрономических часа.

Каждая задача оценивается 7 очками.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!