

A 59-a OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ DE MATEMATICĂ

Chişinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a X-a, prima zi

10.1. Fie a, b, c, m - numere reale pozitive ce satisfac $a > m, b > m, c > m$.

Să se demonstreze, că : $\frac{a^2}{b-m} + \frac{b^2}{c-m} + \frac{c^2}{a-m} \geq 12m$.

10.2. Să se rezolve în numere naturale ecuația $\frac{1}{13x} + \frac{1}{31y} = \frac{1}{2015}$

10.3. Fie AB diametrul cercului ω cu centrul în O și OC o rază perpendiculară pe AB , iar M un punct din interiorul segmentului OC . Fie N cel de al doilea punct de intersecție al dreptei AM cu ω , iar P punctul de intersecție al tangentelor la ω duse prin N și B .

Să se demonstreze că punctele M, O, P și N sînt situate pe un același cerc.

10.4. În interiorul unui cerc cu centrul în O sunt date punctele $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$ astfel că oricare ar fi $i, j, 1 \leq i < j \leq 2015$ punctele O, A_i, A_j sunt necoliniare. Să se demonstreze, că există un unghi cu mărimea de 72° cu vârful în O în interiorul căruia se află exact 403 puncte din mulțimea $\{A_1, A_2, \dots, A_{2015}\}$.

Timp de lucru – 4 ore astronomice

Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

59-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 27 февраля – 2 марта 2015

X класс, первый день

10.1. Пусть a, b, c, m положительные действительные числа удовлетворяющие

$a > m, b > m, c > m$. Доказать, что $\frac{a^2}{b-m} + \frac{b^2}{c-m} + \frac{c^2}{a-m} \geq 12m$.

10.2. Решить в натуральных числах уравнение $\frac{1}{13x} + \frac{1}{31y} = \frac{1}{2015}$

10.3. Пусть AB – диаметр окружности ω с центром в точке O и OC – радиус перпендикулярный AB , а M внутренняя точка отрезка OC . Пусть N – вторая точка пересечения прямой AM и ω , а P точка пересечения касательных к ω , проведенных через N и B . Доказать, что точки M, O, P, N лежат на одной и той же окружности.

10.4. Внутри круга с центром в точке O даны точки $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$ так, что при любых $i, j, 1 \leq i < j \leq 2015$ точки O, A_i, A_j неколлинеарны. Доказать, что существует угол величиной в 72° с вершиной в O , внутри которого лежат точно 403 точки множества $\{A_1, A_2, \dots, A_{2015}\}$.

Время работы – 4 астрономических часа.

Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!