

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 februarie 2016

Prima probă de evaluare pentru OBM 2016 şi OIM 2016

Soluţii

B1. Numerele reale pozitive a, b, c satisfac egalitatea $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$.

Aflaţi cea mai mică valoare numerică posibilă a expresiei $E = a + b + c + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$.

Soluţie. Fie $a > 0, b > 0, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$. Din inegalitatea

$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ rezultă relaţiile

$$0 < ab + bc + ca \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{ab + bc + ca} \geq 3 \quad (1)$$

Vom demonstra că $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 27$. Aplicăm inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz:

$$(ab + bc + ca) \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) = \left[(\sqrt{ab})^2 + (\sqrt{bc})^2 + (\sqrt{ca})^2 \right] \cdot \left[\left(\frac{1}{\sqrt{ab}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{bc}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{ca}} \right)^2 \right] \geq$$

$$(1+1+1)^2 = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca} \geq 9 \cdot 3 = 27.$$

Pentru numerele strict pozitive x, y este justă inegalitatea $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{54xy} \geq \frac{1}{2}$.

Această inegalitate este o consecinţă a inegalităţii MA-MG:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{54xy} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{1}{54xy}} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Prin aplicarea inegalităţii (1) şi inegalităţii precedente, pentru expresia E obţinem

$$E = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{54ab} \right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{1}{54bc} \right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{54ca} \right) + \frac{53}{54} \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{53}{54} \cdot 27 = \frac{3}{2} + \frac{53}{2} = \frac{56}{2} = 28.$$

Rezultă că $\min E \geq 28$. Pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$ are loc egalitatea din enunţ şi $\min E = 28$.

Astfel, $\min E = 28$.

B2. La împărțirea numărului prim p la patru se obține restul egal cu unu. Calculați suma

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right), \text{ unde prin } [x] \text{ s-a notat partea întreagă a numărului real } x.$$

Soluție. Fie $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ - partea lui întreagă, iar $\{x\}$ - partea lui fracționară. Avem $x = [x] + \{x\}$ și relațiile

$$2 \cdot \{x\} - \{2x\} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \{x\} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pentru } \{x\} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Pentru suma S din enunț obținem

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2k^2}{p} \right\rfloor - 2 \cdot \left\lfloor \frac{k^2}{p} \right\rfloor \right) = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{2k^2}{p} - \left\{ \frac{2k^2}{p} \right\} - \frac{2k^2}{p} + 2 \cdot \left\{ \frac{k^2}{p} \right\} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} \left(2 \cdot \left\{ \frac{k^2}{p} \right\} - \left\{ \frac{2k^2}{p} \right\} \right). \end{aligned}$$

Lemă. Pentru orice $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ există $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $b \neq a$, astfel că $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$.

Demonstrație. Deoarece $p \equiv 1 \pmod{4}$, atunci există $d \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ a.î. $d^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Fie $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, atunci există $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ astfel încât $b \equiv da \pmod{p}$. Atunci $a^2 + b^2 \equiv a^2 + a^2 d^2 \equiv a^2 (d^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}$. Dacă $b = a$, atunci $a^2 + b^2 \equiv 2a^2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a \equiv 0 \pmod{p}$, contradicție, deoarece $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Lema este demonstrată.

Astfel, printre numerele $1, 2, \dots, p-1$ există $\frac{p-1}{2}$ perechi (a, b) cu proprietatea $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Astfel, există exact $\frac{p-1}{2}$ elemente

$k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ astfel încât $k^2 \equiv i \pmod{p}$, unde $i > \frac{p}{2}$. Din relațiile (1)

rezultă că $S = \frac{p-1}{2}$.

B3. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle C) = 90^\circ$. Punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile acestui triunghi (BC), (CA) și (AB) sunt M , N și, respectiv P , iar M_1 , N_1 , P_1 sunt simetricele punctelor M , N , P în raport cu mijlocurile laturilor (BC), (CA) și, respectiv (AB). Calculați valoarea numerică a raportului $\frac{AO_1 + BO_1}{AB}$, unde O_1 este centrul cercului circumscris triunghiului $M_1N_1P_1$.

Soluție. Notăm $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Au loc relațiile

$$CM = CN = BM_1 = AN_1 = p - c = r, \quad AP = AN = BP_1 = CN_1 = p - a, \quad BM = BP = AP_1 = CM_1 = p - b,$$

unde r este raza cercului înscris în în triunghiul ABC . Fie K mijlocul arcului (ACB), iar O mijlocul ipotenuzei (AB). Unim punctul K cu punctele A , B , C , M_1 , N_1 , P_1 . Pentru calculul lungimilor KM_1 , KN_1 , KP_1 aplicăm relația lui Stewart în triunghiurile BCK , ACK și ABK .

$$KM_1^2 = CM_1 \cdot \frac{BK^2}{BC} + BM_1 \cdot \frac{CK^2}{BC} - BM_1 \cdot CM_1 \quad (1)$$

$$KN_1^2 = CN_1 \cdot \frac{AK^2}{AC} + AN_1 \cdot \frac{CK^2}{AC} - AN_1 \cdot CN_1 \quad (2)$$

$$KP_1^2 = BP_1 \cdot \frac{AK^2}{AB} + AP_1 \cdot \frac{BK^2}{AB} - AP_1 \cdot BP_1 \quad (3)$$

Punctele P și P_1 sunt simetrice în raport cu mediatoarea OK a ipotenuzei AB , deaceia $KP = KP_1$.

Avem $AO = BO = CO = OK = \frac{c}{2}$, $KA = KB = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $OK \perp AB$. Notăm $m(\angle A) = \alpha$, $m(\angle B) = \beta$.

Fără a pierde din generalitate putem considera $\alpha \geq \beta$. Atunci

$\cos \alpha = \sin \beta = \frac{b}{c}$, $\sin \alpha = \cos \beta = \frac{a}{c}$, măsura arcului ACK este egală cu $\alpha + \beta$, iar $m(\angle COK) = \alpha - \beta$.

Conform teoremei cosinusurilor în triunghiul COK obținem:

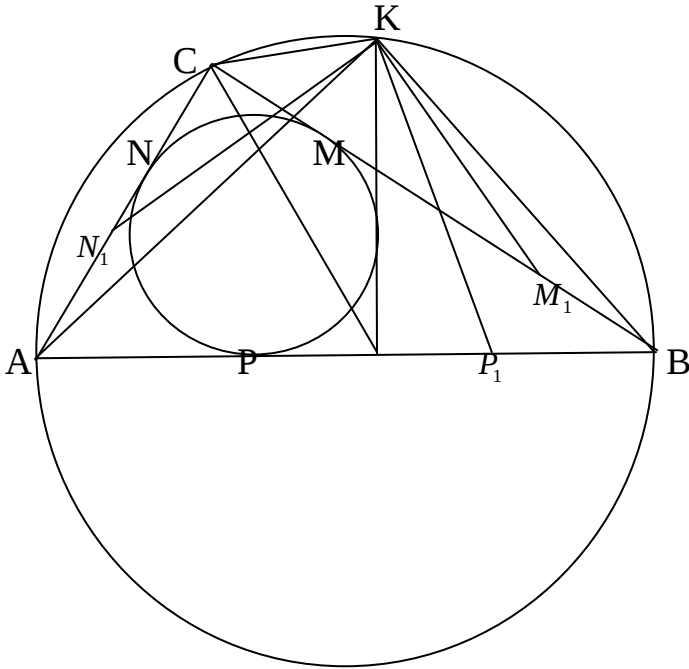
$$CK^2 = \frac{c^2}{2} [1 - \cos(\alpha - \beta)] = \frac{c^2}{2} (1 - \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = \frac{c^2}{2} \left(1 - \frac{2ab}{c^2}\right) = \frac{c^2}{2} - ab.$$

Din relațiile (1), (2) și (3) obținem $KM_1^2 = KN_1^2 = \frac{c^2}{2} + pc - p^2$, $KP_1^2 = \frac{c^2}{2} - (p-a)(p-b)$.

Dacă S este aria triunghiului ABC , atunci au loc relațiile $S = pr = p(p-c) = (p-a)(p-b)$.

Rezultă că $KP_1^2 = KM_1^2 = KN_1^2 = \frac{c^2}{2} + pc - p^2$. Astfel, $K \equiv O_1$, adică K este centrul cercului

circumscriș triunghiului $M_1N_1P_1$, iar $\frac{AO_1 + BO_1}{AB} = \frac{AK + BK}{AB} = \left(\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{c} = \sqrt{2}$.



B4. Să se arate că pentru orice număr prim p și orice număr natural $n \geq 2$ există un număr natural k astfel încât scrierea zecimală a numărului p^k conține n cifre consecutive identice.

Soluție. Se știe că pentru orice număr natural nenul r și orice număr natural nenul m reciproc prim cu r există un număr natural nenul t astfel încât $r^t \equiv 1 \pmod{m}$.

Fie date numărul prim p și numărul natural $n \geq 2$.

Dacă $p \neq 2$ și $p \neq 5$, atunci pentru orice număr natural nenul s există un număr natural nenul t astfel încât $p^t \equiv 1 \pmod{10^s}$. Deoarece $p^t > 10^s$ scrierea zecimală a numărului p^t se termină cu $s - 1$ zerouri și cifra 1. Dacă luăm $s = n + 1$ și $k = t$, atunci problema este rezolvată.

Dacă $p = 2$ sau $p = 5$, notăm $q = 10/p$. Menționăm că p și q sunt prime între ele. Pentru orice număr natural nenul s există un număr natural nenul t astfel încât $p^t \equiv 1 \pmod{q^s}$. Prin urmare, $p^{t+s} \equiv p^s \pmod{10^s}$. Deoarece $p^{t+s} > 10^s > p^s$, numărul p^{t+s} se termină cu toate cifrele numărului p^s , precedate de zerouri până la a s -a cifră de la sfârșit inclusiv. Alegem s astfel încât $q^s > 10^n$ și $k = t + s$. Ca urmare, $p^s = 10^s/q^s < 10^{s-n}$. Rezultă că numărul de zerouri consecutive în numărul $p^k = p^{t+s}$ este cel puțin n , ceea ce rezolvă problema.

Barem de corectare

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.

Problema	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
B 1.	Dacă $a > 0, b > 0, c > 0$ cu $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$, atunci inegalitatea $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ implică $0 < ab + bc + ca \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{ab + bc + ca} \geq 3 \quad (1)$	1 punct
	Arată că $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 27$.	1 punct
	Demonstrează $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{54xy} \geq \frac{1}{2}$ pentru $x > 0, y > 0$	1 punct
	$E = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{1}{54ab} \right) + \left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + \frac{1}{54bc} \right) + \left(\frac{c}{2} + \frac{a}{2} + \frac{1}{54ca} \right) + \frac{53}{54} \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$	1 punct
	Aplică inegalitățile de la punctul 1 și 3	1 punct
	Obține estimția $\min E \geq 28$.	1 punct
	Arată că pentru $a = b = c = \frac{1}{3}$ are loc egalitatea din enunț și $\min E = 28$.	1 punct
	TOTAL	7 puncte
B 2.	$2 \cdot \{x\} - \{2x\} = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \{x\} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pentru } \{x\} \geq \frac{1}{2} \end{cases}$	1 punct
	Aplică $x = [x] + \{x\}$ și scrie suma $S = \sum_{k=1}^{p-1} \left(2 \cdot \left\{ \frac{k^2}{p} \right\} - \left\{ \frac{2k^2}{p} \right\} \right)$	1 punct
	Deoarece $p \equiv 1 \pmod{4}$, atunci există $d \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ a.î. $d^2 \equiv -1 \pmod{p}$	1 punct
	Dacă $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, atunci există $b \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ astfel încât $b \equiv da \pmod{p}$	1 punct
	Obține $a^2 + b^2 \equiv a^2 + a^2 d^2 \equiv a^2 (d^2 + 1) \equiv 0 \pmod{p}$	1 punct
	Printre numerele $1, 2, \dots, p-1$ există $\frac{p-1}{2}$ perechi (a, b) cu proprietatea $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$	1 punct
	Există exact $\frac{p-1}{2}$ numere $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ a.î. $k^2 \equiv i \pmod{p}$, unde $i > \frac{p}{2}$. Conform relațiilor (1)	1 punct

	$S = \frac{p-1}{2}.$	
	<i>TOTAL</i>	<i>7 puncte</i>
B 3.	Calculează toate mărimile care figurează în egalitățile (1), (2) și (3), diferite de KA^2, KB^2, KC^2	1 punct
	Punctele P și P_1 sunt simetrice în raport cu mediatoarea OK a ipotenuzei AB , din acest motiv $KP = KP_1$, unde K mijlocul arcului (ACB)	1 punct
	Pentru calculul lungimilor KM_1, KN_1, KP_1 aplică relația lui Stewart în triunghiurile BCK, ACK și ABK și scrie egalitățile (1), (2) și (3)	1 punct
	Găsește mărimile KA^2, KB^2, KC^2	1 punct
	Găsește $KM_1^2 = KN_1^2 = \frac{c^2}{2} + pc - p^2, KP_1^2 = \frac{c^2}{2} - (p-a)(p-b).$	1 punct
	Obține $KP_1^2 = KM_1^2 = KN_1^2 = \frac{c^2}{2} + pc - p^2.$	1 punct
	$\frac{AO_1 + BO_1}{AB} = \frac{AK + BK}{AB} = \left(\frac{c}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{c} = \sqrt{2}.$	1 punct
	<i>TOTAL</i>	<i>7 puncte</i>
B 4.	Scrie în formă restrânsă sau desfășurată teorema lui Euler: <i>pentru orice număr natural nenul r și orice număr natural nenul m reciproc prim cu r există un număr natural nenul t astfel încât $r^t \equiv 1 \pmod{m}$.</i>	1 punct
	Aplică corect teorema lui Euler și rezolvă problema în cazul $p \neq 2$ și $p \neq 5$	2 puncte
	Aplică corect teorema lui Euler și rezolvă problema în cazul $p = 2$	2 puncte
	Aplică corect teorema lui Euler și rezolvă problema în cazul $p = 5$	2 puncte
	<i>TOTAL</i>	<i>7 puncte</i>