

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie, 2014

Clasa a IX-a, ziua a doua

SOLUȚII

9.5. Scăzând ecuația a doua a sistemului din prima, obținem $xy + z - x - yz = 5$ sau $(y-1)(x-z) = 5$. Vom examina fiecare din 4 posibilități:

$$a) \begin{cases} y-1=1, \\ x-z=5; \end{cases} \quad b) \begin{cases} y-1=5, \\ x-z=1; \end{cases} \quad c) \begin{cases} y-1=-1, \\ x-z=-5; \end{cases} \quad d) \begin{cases} y-1=-5, \\ x-z=-1. \end{cases}$$

a) $y = 2$. Sistemul capătă forma $\begin{cases} 2x+z=27, \\ x+2z=22. \end{cases}$ Prin adunare obținem $3(x+z) = 49$. Soluții întregi nu-s.

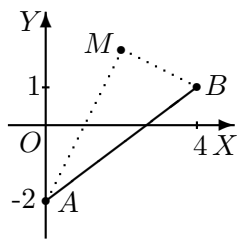
b) $y = 6 \Rightarrow \begin{cases} 6x+z=27, \\ x+6z=22. \end{cases} \Rightarrow 7(x+z) = 49, x+z=7$. Împreună cu ecuația $x-z=1$, aflăm $x=4, z=3$. O soluție este $(4, 6, 3)$.

c) $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} z=27, \\ x=22. \end{cases}$ A doua soluție este $(22, 0, 27)$.

d) $y = -4 \Rightarrow \begin{cases} -4x+z=27, \\ x-4z=22. \end{cases} \Rightarrow -3(x+z) = 49$ – soluții întregi nu-s.

Așadar, sistemul are două soluții; $(4, 6, 3)$ și $(22, 0, 27)$.

9.6. Transformăm expresia în felul următor: $E = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$.



În planul de coordonate XOY examinăm punctele $A(0, -2)$ și $B(4, 1)$. Fie $M(x, y)$ un punct arbitrar din plan. Atunci $AM = \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$, $MB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$, adică $E = AM + MB$. În $\triangle AMB$, evident, $AM + MB \geq AB = \sqrt{(4-0)^2 + (1+2)^2} = 5$, adică $E \geq 5$. Egalitatea se realizează dacă punctul M aparține segmentului AB .

Răspuns: valoarea minimă a expresiei E este egală cu 5.

9.7. $m(\angle BAC) = m(\angle AED) = m(\angle EDF) = m(\angle AFD) = 90^\circ \Rightarrow AEDF$ – dreptunghi, deci $AD = EF$ ca diagonale. Atunci $EF^2 = AD^2 = AE^2 + AF^2$.

Triunghiul ABC e dreptunghic, deci $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (1).

Cum $AD \perp BC$, rezultă $AD = \sqrt{BD \cdot DC}$. (2)

$\triangle ABF$ – dreptunghic, rezultă $BF^2 = AB^2 + AF^2$ (3).

$\triangle AEF$ – dreptunghic, deci $CE^2 = AE^2 + AC^2$ (4). Adunând (3) cu (4) și

ținând cont de (1), avem consecutiv: $BF^2 + CE^2 = AB^2 + AC^2 + AF^2 + AE^2 = BC^2 + AF^2 + AE^2 = BC^2 + EF^2$

$BC^2 + AD^2 = BC^2 + BD \cdot DC =$

$BC^2 + \left(\sqrt{BD \cdot DC}\right)^2 \stackrel{(A-G)}{\leq} BC^2 + \left(\frac{BD+DC}{2}\right)^2 = BC^2 + \frac{BC^2}{4} =$

$5 \cdot \frac{BC^2}{4}$. Am obținut $\frac{5BC^2}{4} \geq CE^2 + BF^2$, de unde

$\frac{5BC^2}{8} \geq \frac{CE^2 + BF^2}{2}$, adică

$$\frac{\sqrt{5} \cdot BC}{2\sqrt{2}} \geq \sqrt{\frac{CE^2 + BF^2}{2}} \stackrel{(M.P.)}{\geq} \frac{CE + BF}{2}, \text{ sau } \frac{\sqrt{5} \cdot BC}{\sqrt{2}} \geq CE + BF. \text{ Astfel, definitiv,}$$

$$\sqrt{5} \cdot BC \geq 2(CE + BF), \text{ c.t.d.}$$

9.8. Dacă $\sqrt{n(n+2014)}$ este rațional, atunci el este întreg. Fie $\sqrt{n(n+2014)} = k, k \in \mathbb{N}^*$. Atunci $n(n+2014) = k^2; n^2 + 2014n + 1007^2 = k^2 + 1007^2; (n+1007)^2 = k^2 + 1007^2$. Notăm, pentru simplitate, $n+1007 = m; m > 1007$. Atunci $(m-k)(m+k) = 1007^2 = 1 \cdot 19^2 \cdot 53^2$. Cum $m-k < m+k$, se vor examina următoarele posibilități:

$$a) \begin{cases} m-k=1, \\ m+k=1007^2; \end{cases} \quad b) \begin{cases} m-k=19, \\ m+k=19 \cdot 53^2; \end{cases} \quad c) \begin{cases} m-k=53, \\ m+k=361 \cdot 53; \end{cases} \quad d) \begin{cases} m-k=361, \\ m+k=53^2. \end{cases}$$

Prin adunarea ecuațiilor fiecărui sistem se află $2m$:

- a) $2m = 1 + 1007^2 \Rightarrow m = 507025 \Rightarrow n = 506018$.
b) $2m = 19 + 19 \cdot 53^2 \Rightarrow m = 53390 \Rightarrow n = 25688$.
c) $2m = 53 + 361 \cdot 53 \Rightarrow m = 9593 \Rightarrow n = 8586$.
d) $2m = 361 + 53^2 \Rightarrow m = 1585 \Rightarrow n = 578$.
Răspuns: $n \in \{578, 8586, 25688, 506018\}$.

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie, 2014

Clasa a IX-a, ziua a doua

BAREM DE CORECTARE**Problema nr. 9.5**

1.	Prin scădere, se află $(y-1)(x-z) = 5$.	2 p.
2.	Numerele $y-1$ și $x-z$ sunt întregi	1 p.
3.	Se examinează 4 cazuri posibile	4 p. (4×1)
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.6

1.	Se separă pătratele perfecte sub radicali	1 p.
2.	Se examinează punctele A, B, M	3 p.
3.	Se folosește $AM + MB \geq AB$	2 p.
4.	Egalitatea cu 5 se realizează	1 p.
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.7

1.	Folosirea teoremei lui Pitagora pentru triunghiurile ABC, EAF, ABF, ACF	1 p.
2.	$AD = \sqrt{BD \cdot DC}$ și $BF^2 + CE^2 = BC^2 + AD^2$	2 p.
3.	Se află $\frac{5BC^2}{4} \geq BF^2 + CE^2$	2 p.
4.	Obținerea $\sqrt{5} \cdot BC \geq \sqrt{2} \cdot (CE + BF)$	2 p.
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.8

1.	Se presupune $\sqrt{n(n+1)} = k$ și se ridică la pătrat	1 p.
2.	Se separă pătratul perfect	1 p.
3.	și se obține $(m-k)(m+k) = 1007$	1 p.
4.	Se rezolvă 4 sisteme de ecuații	4 p. (4×1)
	Total:	7 puncte