

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie, 2015

CLASA IX-a, ziua a doua

SOLUȚII

Problema 9.5. Fie a, b, c trei numere reale, pentru care polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $Q(X)$ și fie $q(X)$ câtul împărțirii. Acest lucru se scrie astfel: $P(X) = Q(X) \cdot q(X)$. Cum $Q(X) = X(X-a)(X-b)$, egalitatea se scrie mai detaliat:

$$X^4 + aX^3 + bX + c = X(X-a)(X-b) \cdot q(X). \quad (1)$$

Relația (1) reprezintă egalitatea a două polinoame, $q(X)$ fiind un polinom de gradul 1. Punând în această egalitate $X = 0$, $X = a$ și $X = b$, obținem respectiv:

$$X = 0 \Rightarrow c = 0.$$

$$X = a \Rightarrow a^4 + a \cdot a^3 + ba = 0 \Rightarrow a(2a^3 + b) = 0.$$

$$X = b \Rightarrow b^4 + ab^3 + b \cdot b = 0 \Rightarrow b^2(b^2 + ab + 1) = 0.$$

$$\text{Numerele } a \text{ și } b \text{ trebuie să fie soluții ale sistemului } \begin{cases} a(2a^3 + b) = 0, \\ b^2(b^2 + ab + 1) = 0. \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Din (1) $\Rightarrow a = 0$ sau $2a^3 + b = 0$. Examinăm fiecare caz.

Cazul 1. $a = 0$. Din (2) $\Rightarrow b^2(b^2 + 1) = 0$, adică și $b = 0$. Se află, astfel, $a = b = c = 0$.

Cazul 2. $2a^3 + b = 0 \Rightarrow b = -2a^3$. Substituim această expresie a lui b în (2):

$(-2a^3)^2 [(-2a^3)^2 + a \cdot (-2a^3) + 1] = 0$ sau $4a^6(4a^6 - 2a^4 + 1) = 0$. Dacă $a = 0$ rezultă $b = 0$, adică $a = b = c = 0$ - soluția deja aflată în Cazul 1. Rămâne $4a^6 - 2a^4 + 1 = 0$. Fie $a^2 = t$, $t \geq 0$. Ecuația capătă forma $4t^3 - 2t^2 + 1 = 0$. Prin probe, aflăm o soluție $t_1 = -\frac{1}{2}$. Acest lucru ne permite să scriem ecuația astfel: $(2t + 1)(2t^2 - 2t + 1) = 0$. Soluția $t_1 = -\frac{1}{2}$ nu convine, ea a fost necesară pentru descompunerea părții stângi. Ecuația rămasă $2t^2 - 2t + 1 = 0$ nu are soluții reale. Deci și în Cazul 2 unica soluție este $a = b = c = 0$.

Așadar, polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $Q(X)$ numai dacă $a = b = c = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Problema 9.6. Inițial, mai jos de fise (sub diagonală) se află $2015 \cdot 1008$ pătrățele. În final, dacă numărul k este bun, sub fise rămân 0 pătrățele. La fiecare mutare, numărul pătrățelelor, aflate mai jos de fise, se micșorează cu k . Dacă după n mutări toate fisele au ajuns pe orizontala de jos, atunci $nk = 2015 \cdot 1008$. Astfel, k este un divizor al numărului $2015 \cdot 1008$. Cel mai mic divizor al acestui număr este egal cu 2.

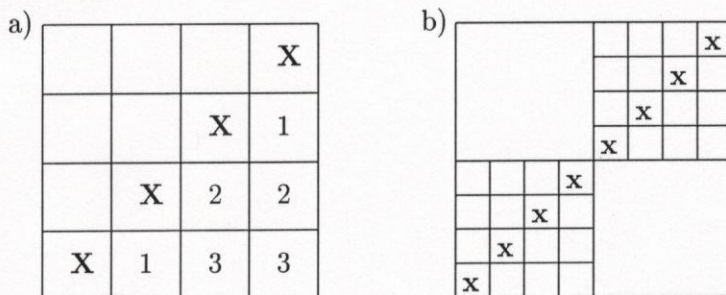
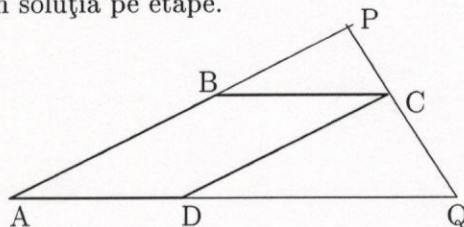


Fig.1

Să arătăm, că $k = 2$ este soluție. Examinăm pătratul 4×4 din colțul stâng-jos (Fig. 1,a)). Cu cifrele 1,2,3 sunt arătate primele 3 mutări, după care în pătratul 4×4 linia de jos e ocupată. Trecem la următorul pătrat 4×4 , situat nemijlocit sub diagonală (Fig. 1,b)). Fisele se aduc pe linia lui de jos. Sub acest pătrat este situat alt pătrat cu toate 16 pătrățele libere. După 8 mutări, fisele ajung pe prima linie a pătratului mare. Acest procedeu se repetă până toate fisele ajung pe prima linie. Acest lucru e posibil, deoarece 2016 se divide la 4.

Problema 9.7. Examinăm soluția pe etape.



Etapa (1). În $\triangle APQ$:

$$DC \parallel AP \Rightarrow \frac{QC}{QP} = \frac{DC}{AP} = \frac{a}{AP}, \quad BC \parallel AQ \Rightarrow \frac{PC}{QP} = \frac{BC}{AQ} = \frac{b}{AQ}.$$

Etapa (2). Adunând relațiile de la etapa 1, obținem:

$$\frac{a}{AP} + \frac{b}{AQ} = \frac{QC}{QP} + \frac{PC}{QP} = \frac{QC + PC}{QP} = 1, \text{ sau } \frac{a \cdot AQ + b \cdot AP}{AP \cdot AQ} = 1.$$

$$\text{Etapa (3). } \frac{a(AQ + \frac{b}{a} \cdot AP)}{\frac{a}{b} \cdot AQ \cdot \frac{b}{a} \cdot AP} = 1 \Leftrightarrow \frac{b(AQ + \frac{b}{a} \cdot AP)}{AQ \cdot \frac{b}{a} \cdot AP} = 1.$$

$$\text{Etapa (4). } b = \frac{AQ \cdot \frac{b}{a} \cdot AP}{AQ + \frac{b}{a} \cdot AP}.$$

$$\begin{aligned} \text{Etapa (5). } b &= \frac{\left(\sqrt{AQ \cdot \frac{b}{a} \cdot AP}\right)^2}{AQ + \frac{b}{a} \cdot AP} \Rightarrow b \leq \frac{\left(\frac{AQ + \frac{b}{a} \cdot AP}{2}\right)^2}{AQ + \frac{b}{a} \cdot AP} \Leftrightarrow b \leq \frac{AQ + \frac{b}{a} \cdot AP}{4} \Leftrightarrow \\ &b \leq \frac{a \cdot AQ + b \cdot AP}{4a} \Leftrightarrow ab \leq \frac{a \cdot AQ + b \cdot AP}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Etapa (6). } \frac{ab}{2} \leq \frac{a \cdot AQ + b \cdot AP}{8}.$$

$$\text{Etapa (7). } A_{ABCD} = ab \cdot \sin 30^\circ = \frac{ab}{2} \Rightarrow A_{ABCD} \leq \frac{a \cdot AQ + b \cdot AP}{8}, \text{ c.t.d.}$$

Problema 9.8. D.V.A.: $x \geq 0$. În prealabil, vom examina două cazuri: $x = 0$ și $y = 0$.

Cazul 1. $x = 0$. Din inecuația dată se obține $y^2(y^2 - 4y + 5) \leq 0$, adică $y^2[(y - 2)^2 + 1] \leq 0$, de unde $y = 0$. Astfel,

$$x = 0 \Rightarrow y = 0. \quad (1)$$

Cazul 2. $y = 0$. Din inecuația dată se obține $5x \leq 0$. Ținând cont de D.V.A., se află $x = 0$. Astfel

$$y = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (2)$$

Astfel, pentru inecuația dată $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ și $x = y = 0$ reprezintă o soluție a inecuației.

Remarcă. Din inegalitatea $(x + y^2)[(y - 2)^2 + 1] \leq 2y\sqrt{x}$ mai rezultă că y nu poate fi negativ. Fie acum $x \neq 0$ și $y \neq 0$, adică $x > 0$ și $y > 0$. Împărțim ambele părți ale inecuației la $y\sqrt{x}$:

$$\frac{x + y^2}{y\sqrt{x}}(y^2 - 4y + 5) \leq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)[(y - 2)^2 + 1] \leq 2. \quad (3)$$

Vom estima fiecare factor din partea stângă a inegalității (3).

a) $(y - 2)^2 + 1 \geq 1$ cu egalitate doar pentru $y = 2$.

b) $\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2$ cu egalitate doar pentru $y = \sqrt{x}$, adică pentru $x = y^2$.

Astfel, partea stângă a inecuației (3) este mai mare sau egală cu 2. Prin urmare, este posibilă doar egalitatea și ea se realizează pentru $x = 4$, $y = 2$.

Așadar, inecuația are doar două soluții: $x = y = 0$ și $x = 4$, $y = 2$.

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie, 2015

CLASA IX-a, ziua a doua

BAREM DA CORECTARE

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
9.5.	7p.		- prin absurd, fie $P(X) = Q(X) \cdot q(X)$ - pentru $x = 0$ se află $c = 0$ - pentru $x = a$ se află $a(2a^3 + b) = 0$ - pentru $x = b$ se află $b^2(b^2 + ab + 1) = 0$ - pentru $a = 0$ se află și $b = c = 0$ - pentru $2a^3 + b = 0$ alte soluții reale nu-s.	1p. 1p. 1p. 1p. 1p. 2p.	
9.6.	7p.	$k = 2$	- inițial, sub fise se află 2015×1008 pătrățele - la fiecare mutare, numărul pătrățelelor se micșorează cu k - numărul mutărilor trebuie să fie divizor al numărului 2015×1008 - cel mai mic divizor este 2 - realizarea	1p. 1p. 1p. 3p.	
9.7.	7p.		Pentru fiecare etapă din rezolvarea propusă se acordă câte un punct.	7p.	
9.8.	7p.	$x = y = 0;$ $x = 4, y = 2.$	- $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ și $x = y = 0$ e soluție - prin împărțirea la $y\sqrt{x}$ se obține $\left(\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) [(y-2)^2 + 1] \leq 2$ - y nu poate fi negativ - se evaluează factorii: $(y-2)^2 + 1 \geq 1$ cu egalitate pentru $y = 2$ $\frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{y}{\sqrt{x}} \geq 2$ cu egalitate pentru $y = \sqrt{x}$ - din evaluări $\Rightarrow x = y = 0$ și $x = 4, y = 2.$ sunt unicele soluții.	1p. 2p. 1p. 1p. 1p. 1p.	