

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie, 2014

Clasa a IX-a, prima zi

SOLUȚII

9.1. 1. Abscisele punctelor de intersecție a parabolei din enunț cu axa OX sunt soluțiile ecuației $x^2 + (2a - 1)x + 2014 = 0$.

2. Conform teoremei lui Viète, avem: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2a, \\ x_1 x_2 = 2014. \end{cases}$

3. Din $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ și $x_1 x_2 = 2014$ rezultă că x_1 și x_2 sunt divizori ai lui 2014.

4. $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$.

5. Divizorii lui 2014 sunt: $D_{2014} = \{1, 2, 19, 53, 2 \cdot 19, 2 \cdot 53, 19 \cdot 53, 2 \cdot 19 \cdot 53\}$.

6. Prin urmare, avem următoarele cazuri:

$$x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2014 \Rightarrow 1 - 2a = 2015 \Leftrightarrow 2a = -2014, a = -1007;$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow 19 \cdot 53 \Leftrightarrow 1 - 2a = 1009 \Leftrightarrow 2a = -1008, a = -504;$$

$$x_1 = 19 \Rightarrow x_2 = 2 \cdot 53 \Leftrightarrow 1 - 2a = 125 \Leftrightarrow 2a = -124, a = -62;$$

$$x_1 = 53 \Rightarrow x_2 = 2 \cdot 19 \Leftrightarrow 1 - 2a = 91 \Leftrightarrow 2a = -90, a = -45;$$

$$x_1 = 2 \cdot 19 \Rightarrow x_2 = 53 \Leftrightarrow a = -45;$$

$$x_1 = 2 \cdot 53 \Rightarrow x_2 = 19 \Leftrightarrow a = -52;$$

$$x_1 = 19 \cdot 53 \Rightarrow x_2 = 2 \Leftrightarrow a = -504;$$

$$x_1 = 2 \cdot 19 \cdot 53 \Rightarrow x_2 = 1 \Leftrightarrow a = -1007.$$

În mod absolut asemănător se examinează cazurile, când x_1 este negativ.

Răspuns: $a \in \{-45, -62, -504, -1007, 46, 63, 505, 1008\}$.

9.2. Notăm cu E partea stângă a inegalității. Deschizând parantezele, obținem:

$$E = 1 + a + a^2 + \dots + a^{1007} + a^{1007} + \dots + a^{2014}.$$

Grupăm termenii egal depărtați de extremități:

$$E = (1 + a^{2014}) + (a + a^{2013}) + (a^2 + a^{2012}) + \dots + (a^{1007} + a^{1007}).$$

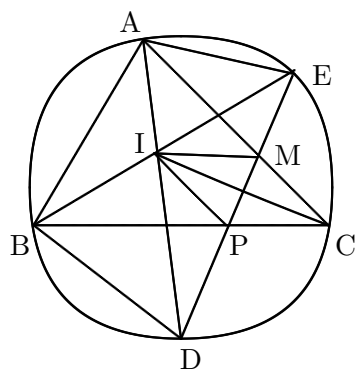
Produsul termenilor din fiecare grupare este același și este egal cu a^{2014} . Pentru fiecare sumă din paranteze se aplică teorema mediilor ($a + b \geq \sqrt{ab}$):

$$E \geq 2(a^{1007} + a^{1007} + \dots + a^{1007}) = 2016 \cdot a^{1007} = 2014a^{1007} + 2a^{1007} > 2014 \cdot a^{1007}.$$

Afirmația e demonstrată.

$$\mathbf{9.3.} \quad 1) m(\angle BID) = \frac{m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}; m(\angle BPD) = \frac{m(\overset{\frown}{EC}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}.$$

2) BE – bisectoare, deci $m(\overset{\frown}{AE}) = m(\overset{\frown}{EC})$. Din 1) și 2) obținem $m(\angle BID) = m(\angle BPD)$, prin urmare, $BIPD$ este inscriptibil.



$$3) m(\angle AIE) = \frac{m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{BD})}{2}; m(\angle AME) = \frac{m(\overset{\frown}{AE}) + m(\overset{\frown}{DC})}{2}.$$

4) AD – bisectoare, deci $m(\overset{\frown}{BD}) = m(\overset{\frown}{DC})$. Din 3) obținem $m(\angle AIE) = m(\angle AME)$, prin urmare, $AIME$ este inscriptibil.

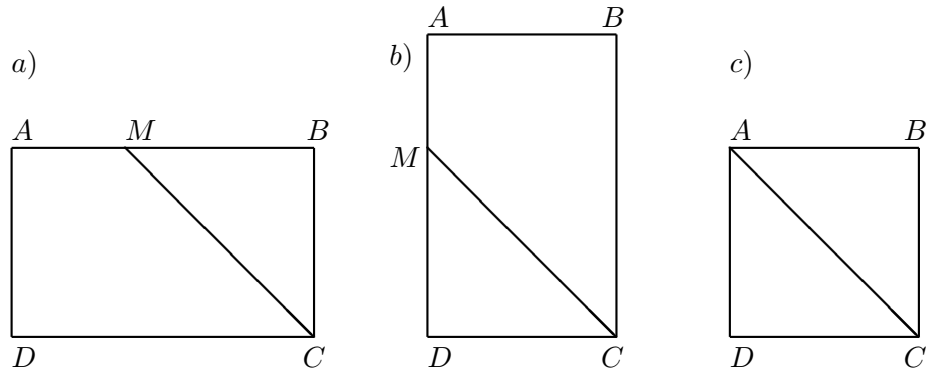
5) $BIPD$ – inscriptibil, deci $\angle BDI \equiv \angle BPI$. Dar $\angle BDI \equiv \angle BCA$ (se sprijină pe același arc), deci $\angle BPI \equiv \angle BCA$ și $IP \parallel AC$.

6) $BIME$ este inscriptibil, prin urmare, $\angle AEI \equiv \angle AMI$. Dar $\angle AMI \equiv \angle ACB$ (se sprijină pe același arc), deci $\angle AMI \equiv \angle ACB$ și $MI \parallel PC$.

7) Din 5) și 6) obținem că $IMCP$ este paralelogram. IC este bisectoarea $\angle ACB$, deci $\angle ICA \equiv \angle ICB$. Dar $\angle ICB \equiv \angle CIM$. Astfel, $\angle ICA \equiv \angle CIM$ și $\triangle ICM$ este isoscel cu $IM \equiv MC$. Definitiv, $IMCP$ este romb, c.t.d.

9.4. Evident, există un singur pătrățel, de pe care fisa nu mai poate fi mutată: colțul din dreapta-jos. Cel care pune fisa pe acest pătrățel, câștigă. Considerăm dreptunghiul $ABCD$. Din punctul C ducem o dreaptă ce trece prin diagonalele pătrățelilor (vezi desenul schematic). Această dreaptă poate intersecta:

a) latura orizontală AB , dacă $n < 2014$ (fig. a)); b) latura verticală AD , dacă $n > 2014$ (fig. b)); c) ambele laturi în vârful A , dacă $n = 2014$ (fig. c)). Vom examina fiecare caz.



a) Dacă $M \in AB$, primul jucător mută orizontal fisa (spre dreapta), punând-o pe diagonală. După fiecare mutare a jucătorului al doilea, primul readuce fisa pe diagonală. În consecință, câștigă.

b) Dacă $M \in AD$, primul jucător mută fisa în jos, de asemenea, punând-o pe diagonală, deci, câștigă.

c) Dacă M coincide cu A , adică pentru $n = 2014$, rolurile jucătorilor se schimbă. Va câștiga cel de-al doilea jucător.

Răspuns: n poate fi oricare număr natural, $n > 1$, $n \neq 2014$.

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie, 2014

Clasa a IX-a, prima zi

BAREM DE CORECTARE**Problema nr. 9.1**

1.	Abscisele cerute sunt soluțiile unei ecuații de gradul II	1p.
2.	Aplicarea formulelor lui Viète $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2a, \\ x_1 x_2 = 2014. \end{cases}$	1 p.
3.	x_1 și x_2 sunt divizorii lui $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$	1 p.
4.	Se află toți divizorii lui 2014	2 p.
5.	Aflarea lui a , din sistemul $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2a, \\ x_1 x_2 = 2014. \end{cases}$ pentru toți divizorii lui 2014	2 p.
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.2

1.	Se deschid parantezele	1 p.
2.	Se grupează termenii egal depărtați de capete	2 p.
3.	Pentru fiecare grupare se aplică teorema mediilor	3 p.
4.	Calculul final, concluzia	1 p.
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.3

1.	$BIPD$ este inscriptibil	2 p.
2.	$AIME$ este inscriptibil	1 p.
3.	$IP \parallel AC$	1 p.
4.	$MI \parallel PC$	1 p.
5.	$IMCP$ este romb	2 p.
	Total:	7 puncte

Problema nr. 9.4

1.	Câștigă jucătorul, care ajunge în colțul drept-jos	1 p.
2.	Se folosește diagonala, ce pornește din colțul drept-jos	2 p.
3.	Se examinează 3 cazuri de intersecție a diagonalei cu laturile	3 p. (3×1)
4.	Obținerea răspunsului final	1 p.
	Total:	7 puncte