

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie, 2015

CLASA IX-a, prima zi

SOLUȚII

Problema 9.1. Fie N un număr cu proprietățile din enunț. Atunci $\exists m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $N - 1 = 19m$; $N + 1 = 32n$, adică $N = 19m + 1$, $N = 32n - 1$ de unde rezultă $19m - 32n + 2 = 0$. Rezolvând această ecuație în numere întregi, se află $m = 32k + 10$, $n = 19k + 6$, unde $k \in \mathbb{Z}$. Dar atunci

$$N = 608k + 191; k \in \mathbb{Z}.$$

Valorile naturale ale numărului N se obțin pentru $k \in \mathbb{N}$, adică pentru $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Al patrulea număr al șirului se obține pentru $k = 3$ și este egal cu 2015.

Așadar, toate numerele căutate au forma $608k + 191$, $k \in \mathbb{N}$; al patrulea număr din acest șir este numărul 2015.

Problema 9.2. Fie a și b două numere, astfel încât pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea dublă

$$-1 \leq \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + x + 1} \leq 1 \quad (*)$$

și, în plus, există valori ale lui x , pentru care $f(x)$ ia valorile extreme ± 1 . Cum $x^2 + x + 1 > 0$ pentru orice x real, din (*) se obține

$$-x^2 - x - 1 \leq x^2 + ax + b \leq x^2 + x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (a+1)x + (b+1) \geq 0, & (1) \\ (a-1)x \leq 1-b. & (2) \end{cases}$$

Inegalitatea (2) e satisfăcută pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ doar dacă $a = 1$ și $b \leq 1$. Atunci inegalitatea (1) ia forma $2x^2 + 2x + (b+1) \geq 0$, la fel pentru oricare x real. Aceasta înseamnă că discriminantul părții stângi, $\Delta \leq 0$, adică $4 - 8(b+1) \leq 0 \Rightarrow b \geq -\frac{1}{2}$. Astfel $a = 1$, $b \in [\frac{1}{2}, 1]$ și relația (*) ia forma

$$-1 \leq \frac{x^2 + x + b}{x^2 + x + 1} \leq 1 \quad (**)$$

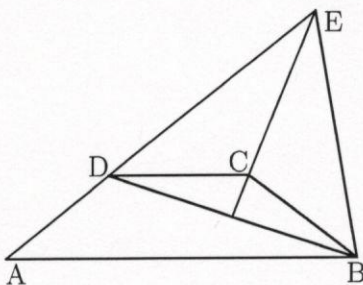
Examinăm realizarea egalității la capetele intervalului $[-1, 1]$.

a) $f(x) = 1$, adică $\frac{x^2 + x + b}{x^2 + x + 1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + b = x^2 + x + 1; \Leftrightarrow b = 1$.

b) $f(x) = -1$. Pentru $a = b = 1$, din (*) rezultă $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = -1$ – lucru imposibil, fracția fiind egală cu 1, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Așadar, nu există numere reale a și b , care ar satisface condiția din enunț.

Problema 9.3. Folosind desenul alăturat, vom examina soluția pe etape.



Etapa (1). $ABCD$ - isoscel $\Rightarrow AC = BD \Rightarrow DE = BD$; $m(\angle CBA) = m(\angle A) = 40^\circ$.

Etapa (2). $DC \parallel AB \Rightarrow \angle CDB \cong \angle ABD$. $DC = BC \Rightarrow \triangle BDC$ - isoscel. $\Rightarrow \angle CDB \cong \angle CBD$. Deci, $\angle CBD \cong \angle ABD \Rightarrow m(\angle CBD) = m(\angle ABD) = 20^\circ$.

Etapa (3). $DC \parallel AB \Rightarrow \angle A \cong \angle CDE \Rightarrow m(\angle CDE) = 40^\circ \Rightarrow m(\angle BDE) = m(\angle CDB) + m(\angle CDE) = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$.

Etapa (4). $ED = BD \Rightarrow \triangle BED$ - isoscel $\Rightarrow \angle DBE \cong \angle DEB \Rightarrow m(\angle DBE) = m(\angle DEB) = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow \triangle BDE$ - echilateral $\Rightarrow BE = BD = DE$ și $m(\angle CBE) = 40^\circ$.

Etapa (5). $DE = BE$. $DC = BC$. $\angle EDC \cong \angle EBC \Rightarrow \triangle EDC \cong \triangle EBC$.

Etapa (6). $\angle BEC \cong \angle DEC \Rightarrow EC$ – bisectoarea unghiului $\angle DEB$.

Etapa (7). $\triangle DEB$ – isoscel și CE – bisectoare $\Rightarrow EC$ – înălțime $\Rightarrow EC \perp DB$, c.t.d.

Problema 9.4. Coeficienții $4m + 1$ și $4n - 1$ sunt numere impare, prin urmare, necunoscutele x și y trebuie să fie de parități diferite.

Cazul 1. Fie $x = 2k$, $y = 2s + 1$, unde $k, s \in \mathbb{Z}$. Atunci din ecuație se obține

$(4m + 1)(2k)^2 - (4n - 1)(2s + 1)^2 = 2015$, de unde $4k^2(4m + 1) - (4n - 1)(4s^2 + 4s + 1) = 2015$ sau $4k^2(4m + 1) - 4n(4s^2 + 4s + 1) + 4s^2 + 4s = 2014$. Partea stângă a acestei egalități se împarte la 4, iar partea dreaptă nu. Cazul 1 este imposibil.

Cazul 2. Fie acum $x = 2k + 1$, $y = 2s$, unde $k, s \in \mathbb{Z}$. Se obține:

$(4m + 1)(2k + 1)^2 - (4n - 1)(2s)^2 = 2015$, de unde $(4m + 1)(4k^2 + 4k + 1) - (4n - 1) \cdot 4s^2 = 2015$, sau $4m(4k^2 + 4k + 1) + 4k^2 + 4k - 4s^2(4n - 1) = 2014$. Aceeași contradicție, deci și Cazul 2 este imposibil.

Astfel, ecuația dată nu are soluții în $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie, 2015

CLASA IX-a, prima zi

BAREM DE CORECTARE

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapetele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
9.1.	7p.	$608k + 191$; $a_4 = 2015$	- se află $N - 1 = 19m$ și $N + 1 = 32n$ - se obține ecuația $19m - 32n + 2 = 0$ - se află soluția $N = 608k + 191$ - pentru soluții naturale se ia $k \in \mathbb{N}$ - se stabilește că al 4-lea termen este 2015.	1p. 1p. 3p. 1p. 1p.	
9.2.	7p.		- se stabilește că $-1 \leq f(x) \leq 1$ și că egalitățile extreme se realizează - se obține sistemul de inegalități $\begin{cases} 2x^2 + (a+1)x + (b+1) \geq 0, \\ (a-1)x \leq 1-b \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ - se află $a = 1$ și $b \in [\frac{1}{2}, 1]$ - din $f(x) = 1$ rezultă $b = 1$ - pentru $a = b = 1$ egalitatea $f(x) = -1$ devine imposibilă.	1p. 2p. 2p. 1p. 1p.	
9.3.	7p.		Pentru fiecare etapă din rezolvarea propusă se acordă câte un punct	7p.	
9.4.	7p.	$S = \emptyset$	- x și y au parități diferite - cazul x par, y impar conduce la contradicție - cazul x impar, y par conduce la contradicție - concluzia: $S = \emptyset$.	1p. 3p. 2p. 1p.	

Problema 9.5. (variantă alternativă)

- Împărțind $P(X)$ la $Q(X)$, se află restul egal cu $(2a^2 + 2ab + b^2)X^2 + (b - 2a^2b - ab^2)X + c$ - 2p.
- Restul trebuie să fie egal cu 0 pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ - 1p.
- Se obține sistemul $\begin{cases} 2a^2 + 2ab + b^2 = 0, \\ b - 2a^2b - a^2b = 0. \end{cases}$ - 1p.
- Se rezolvă sistemul și se află $a = b = c = 0$. - 3p.