

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a VIII-a, ziua a doua

Soluții

8.5. Se ştie, că ecuația $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2015| = y(y+1)$ are o singură soluție (x_0, y_0) cu $y_0 > 0$. Demonstrați, că x_0 și y_0 sunt numere naturale și că numărul $A = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 1$ este pătrat perfect.

Soluție:

Fie, că (x_0, y_0) cu $y_0 > 0$ este o soluție a ecuației din enunț. Atunci $(2016 - x_0, y_0)$ este la fel o soluție a ecuației din enunț. Și deoarece soluția este unică rezultă, că $2016 - x_0 = x_0$, de unde se obține că $x_0 = 1008$.

Înlocuind $x_0 = 1008$ în ecuația din enunț obținem:

$$1007 + 1006 + \dots + 2 + 1 + 0 + 1 + 2 + \dots + 1007 = y(y+1) \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1007 \cdot 1008}{2} = y(y+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y(y+1) = 1007 \cdot 1008. \text{ Și deoarece } y_0 > 0 \text{ rezultă, că } y_0 = 1007.$$

Am obținut $(x_0, y_0) = (1008, 1007)$ și deci soluțiile sunt numere naturale.

Deoarece $x_0 - y_0 = 1008 - 1007 = 1$ avem:

$$A = x_0^2 - 2x_0y_0 + 2y_0^2 - 1 = (x_0^2 - 2x_0y_0 + y_0^2) + y_0^2 - 1 = (x_0 - y_0)^2 + y_0^2 - 1 = 1 + y_0^2 - 1 = y_0^2.$$

Deci $A = y_0^2 = 1007^2$.

Răspuns: $x_0 = 1008$, $y_0 = 1007$ și $A = y_0^2 = 1007^2$.

8.6. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația:

$$\frac{x-1}{2014} + \frac{x-2}{2013} + \frac{x-3}{2012} + \dots + \frac{x-2012}{3} + \frac{x-2013}{2} + \frac{x-2014}{1} = \frac{2014 \cdot x}{2015}.$$

Soluție:

Din fiecare fracție se scade fracția $\frac{x}{2015}$, adică scădem de la fiecare membru al ecuației fracția $\frac{x}{2015}$ și se

$$\text{obține: } \frac{x-2015}{2014 \cdot 2015} + \frac{x-2015}{2013 \cdot 2015} + \frac{x-2015}{2012 \cdot 2015} + \dots + \frac{x-2015}{3 \cdot 2015} + \frac{x-2015}{2 \cdot 2015} + \frac{x-2015}{1 \cdot 2015} = 0.$$

$$(x-2015) \cdot \left(\frac{1}{2014 \cdot 2015} + \frac{1}{2013 \cdot 2015} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2015} + \frac{1}{1 \cdot 2015} \right) = 0$$

Evident, că $x - 2015 = 0 \Rightarrow x = 2015$.

Răspuns: $S = \{2015\}$.

8.7. În triunghiul ABC punctul D este mijlocul laturii BC . Dreapta dusă prin vârful B și mijlocul segmentului AD intersectează latura AC în punctul E . Dreapta dusă prin punctul C paralel cu dreapta AD intersectează prelungirea laturii BA în punctul K .

Demonstrați, că punctele D , E și K sunt coliniare.

Soluție:

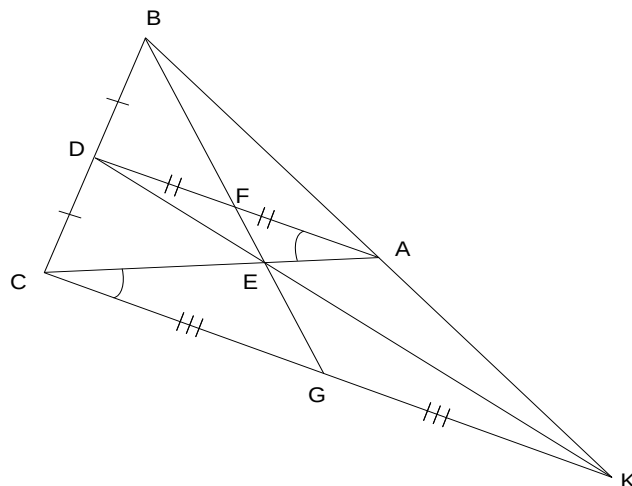
Fie $BE \cap AD = \{F\}$ și $BE \cap CK = \{G\}$.

Din $AD \parallel CK \Rightarrow DF \parallel CG$ și $AF \parallel GK$.

Deoarece punctul D este mijlocul laturii BC ,

rezultă, că punctul F este mijlocul segmentului

BG și punctul A este mijlocul segmentului BK .



Din asemănarea $\triangle BDF \sim \triangle BCG$ și asemănarea $\triangle BFA \sim \triangle BGK \Rightarrow \frac{DF}{CG} = \frac{BF}{BG} = \frac{FA}{GK}$.

Din $DF = FA \Rightarrow CG = GK$. Din $AF \parallel GK$ și $BD = DC \Rightarrow [DA]$ este linie mijlocie în

$\triangle BCK \Rightarrow BA = AK$ și $DF = AF = \frac{1}{2} \cdot CG$.

Din asemănarea $\triangle CEG \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{CE}{EA} = \frac{CG}{AF} = \frac{CG}{\frac{1}{2}CG} = 2$.

Avem: $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AK}{KB} = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$ și atunci conform teoremei lui Menelaos punctele D, E și K sunt coliniare. Afirmatia este demonstrată.

8.8. Pentru orice numere reale strict pozitive a și b se consideră expresia $E(a, b) = \left(8 + \frac{1}{a}\right)\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{8}\right)$.

a) Demonstrați, că $E(a, b) > \frac{113}{8}$;

b) Determinați valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ și valorile a și b pentru care se obține această valoare minimă.

a) Soluție:

Scriem expresia $E(a, b)$ astfel:

$$E(a, b) = \frac{65}{8} + \left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(8ab + \frac{1}{8ab}\right) = \frac{113}{8} + \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{8ab} - \frac{1}{\sqrt{8ab}}\right)^2 > \frac{113}{8}$$

Inegalitatea este strictă, deoarece pătratele din expresia $E(a, b)$ nu pot fi simultan egale cu zero.

Deci $E(a, b) > \frac{113}{8}$ și afirmația a) este demonstrată.

b) Soluție:

Avem expresia transformată: $E(a, b) = \frac{65}{8} + a + b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab + \frac{1}{8ab}$.

1) Aplicăm inegalitatea mediilor pentru 3 numere $a, b, \frac{1}{8ab}$ astfel:

$$\left(\frac{a + b + \frac{1}{8ab}}{3}\right)^3 \geq a \cdot b \cdot \frac{1}{8ab} = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(a + b + \frac{1}{8ab}\right)^3 \geq \frac{27}{8} \Rightarrow a + b + \frac{1}{8ab} \geq \frac{3}{2} \quad (1)$$

Egalitatea (1) se obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

2) Aplicăm inegalitatea mediilor pentru 3 numere $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 8ab$ astfel:

$$\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab}{3}\right)^3 \geq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot 8ab = \frac{1}{8} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab\right)^3 \geq 27 \cdot 8 = 6^3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab \geq 6 \quad (2)$$

Egalitatea (2) se obține la fel pentru $a = b = \frac{1}{2}$.

3) Expresia $E(a, b)$ se poate scrie astfel:

$$E(a, b) = \left(a + b + \frac{1}{8ab}\right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab\right) + \frac{65}{8} \geq \frac{3}{2} + 6 + \frac{65}{8} = \frac{125}{8} \Rightarrow E(a, b) \geq \frac{125}{8} \Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^+} E(a, b) = \frac{125}{8}.$$

Egalitatea $E(a, b) = \frac{125}{8}$ se obține la fel pentru $a = b = \frac{1}{2}$, adică $E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{8}$.

Deci, valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ este egală cu $\frac{125}{8}$ și se obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$, adică

$$\min_{x \in R^+} E(a, b) = E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{8}.$$

Răspuns:

Valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ este egală cu $\frac{125}{8}$ și se obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$, adică

$$\min_{x \in R^+} E(a, b) = E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{125}{8}.$$

BAREM DE CORECTARE

Problema	Răspuns corect	Etapetele rezolvării	Punctaj acordat
8.5. 7 p.	$(x_0, y_0) = (1008, 1007)$ $A = y_0^2 = 1007^2$	- A concluzionat, că dacă (x_0, y_0) cu $y_0 > 0$ este o soluție a ecuației din enunț, atunci și $(2016 - x_0, y_0)$ este la fel o soluție a ecuației din enunț - A determinat, că $2016 - x_0 = x_0$ și a aflat soluția $x_0 = 1008$. - A dedus, că $y(y+1) = 1007 \cdot 1008$. Și deoarece $y_0 > 0$ rezultă, că $y_0 = 1007$ cu soluția $(x_0, y_0) = (1008, 1007)$ - A demonstrat, că $A = y_0^2 = 1007^2$	2 p. 1 p. 2 p. 2 p.
8.6. 7 p.	$S = \{2015\}$	- A obținut ecuația $(x-2015) \cdot \left(\frac{1}{2014 \cdot 2015} + \frac{1}{2013 \cdot 2015} + \dots + \frac{1}{2 \cdot 2015} + \frac{1}{1 \cdot 2015} \right) = 0$ - A obținut ecuația $x - 2015 = 0$ și a obținut soluția $x = 2015$	5 p. 2 p.
8.7. 7 p.	Punctele D, E și K sunt coliniare.	- Desen corect cu completări ale punctelor de intersecție - A aplicat asemănarea $\triangle BDF \sim \triangle BCG$ și asemănarea $\triangle BFA \sim \triangle BGK$ și a dedus, că $\frac{DF}{CG} = \frac{BF}{BG} = \frac{FA}{GK}$. - A demonstrat, că $[DA]$ este linie mijlocie în $\triangle BCK$ și a dedus, că $BA = AK$ și $DF = AF = \frac{1}{2} \cdot CG$. - A aplicat asemănarea $\triangle CEG \sim \triangle AEF$ și a dedus, că $\frac{CE}{EA} = \frac{CG}{AF} = \frac{CG}{\frac{1}{2}CG} = 2$ - A aplicat teorema lui Menelaos, a dedus, că $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AK}{KB} = 1$ și a concluzionat, că punctele D, E și K sunt coliniare.	1 p. 2 p. 1 p. 2 p. 1 p.
8.8. 7 p.	Valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ este $\min_{x \in R^+} E(a, b) = \frac{125}{8}$ și ea obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$	- A demonstrat, că $E(a, b) > \frac{113}{8}$ - A demonstrat inegalitatea $a + b + \frac{1}{8ab} \geq \frac{3}{2}$ (1) - A demonstrat inegalitatea $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 8ab \geq 6$ (2) - A dedus, că valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ este egală cu $\frac{125}{8}$, adică $\min_{x \in R^+} E(a, b) = \frac{125}{8}$ - A dedus, că valoarea minimă a expresiei $E(a, b)$ se obține pentru $a = b = \frac{1}{2}$.	2 p. 1 p. 1p. 2 p. 1 p.

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.