

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie, 2016

CLASA VIII-a, prima zi

SOLUȚIILE PROBLEMELOR

Problema 8.1. Pentru a pleca în excursie, toți cei 919 participanți la Olimpiada Internațională de Matematică au fost repartizați în autocare și microbuze: câte 36 de persoane în fiecare autocar și câte un număr egal de persoane în fiecare din cele 41 de microbuze. De câte autocare a fost nevoie și câte persoane au urcat într-un microbuz?

Rezolvare. Fie x numărul autocarelor, y numărul de persoane într-un microbuz. Conform condiției,

$$36x + 41y = 919; \quad x, y \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow x = \frac{919 - 41y}{36} = 25 - y + \frac{19 - 5y}{36}. \text{ Fie } 19 - 5y = 36k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = \frac{19 - 36k}{5} = 3 - 7k + \frac{4 - k}{5}.$$

$$\text{Fie } 4 - k = 5n; \quad n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 4 - 5n. \text{ Atunci } y = \frac{19 - 36(4 - 5n)}{5}; \quad y = 36n - 25. \text{ Dar atunci}$$

$$x = 25 - (36n - 25) + \frac{19 - 5(36n - 25)}{36}; \quad x = -41n + 54. \text{ Așadar, } \begin{cases} x = -41n + 54, \\ y = 36n - 25. \end{cases} \text{ cu } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Cum } x, y > 0, \text{ rezultă } \begin{cases} -41n + 54 > 0, \\ 36n - 25 > 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n < \frac{54}{41}, \\ n > \frac{25}{36}. \end{cases} \text{ Cum } n \in \mathbb{Z}, \text{ rezultă } n = 1. \text{ Atunci } x =$$

$$-41 \cdot 1 + 54 = 13; \quad y = 36 \cdot 1 - 25 = 11. \text{ Se verifică ușor, că numerele aflate satisfac ecuația.}$$

Răspuns: 13 autocare; 11 persoane într-un microbuz.

Problema 8.2. Să se afle toate perechile (x, y) de numere naturale prime, care satisfac ecuația

$$x^2 + 5y + 24 = y^2 + 11x.$$

Rezolvare. Ecuația se scrie astfel:

$$(x - y - 3)(x + y - 8) = 0. \quad (1)$$

Această descompunere poate fi obținută prin diverse metode. De exemplu, se scrie ecuația din enunț astfel:

$$x^2 - 11x + 24 = y^2 - 5y. \quad (2)$$

Prin separarea pătratului perfect se obține:

$$x^2 - 11x = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{11}{2} + \left(\frac{11}{2}\right)^2 - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4};$$

$$y^2 - 5y = y^2 - 2 \cdot y \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}.$$

$$\text{Ecuația (2) ia forma } \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4} + 24 = \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \text{ sau } \left(x - \frac{11}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x - \frac{11}{2} - y + \frac{5}{2}\right) \left(x - \frac{11}{2} + y - \frac{5}{2}\right) = 0, \text{ adică (1).}$$

$$\text{Din (1) rezultă } \begin{cases} x - y - 3 = 0, \\ x + y - 8 = 0; \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 8. \end{cases} \text{ Din } x - y = 3 \Rightarrow y - \text{par, adică } y = 2. \text{ Dar atunci}$$

$$x = 5. \text{ O soluție este } x = 5, y = 2.$$

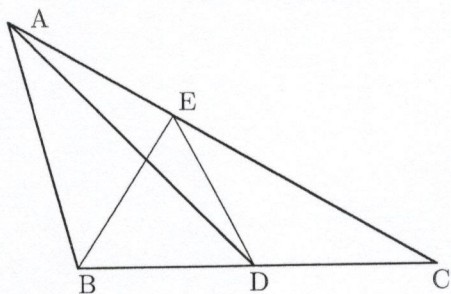
$$\text{Ecuația } x + y = 8 \text{ are în numere prime doar soluțiile } x = 3, y = 5 \text{ și } x = 5, y = 3.$$

$$\text{Răspuns: 1) } x = 5, y = 2; \text{ 2) } x = 3, y = 5; \text{ 3) } x = 5, y = 3.$$

Problema 8.3. Fie triunghiul ABC cu $m(\angle B) = 105^\circ$ și $m(\angle C) = 30^\circ$. Dacă $D \in (BC)$ astfel încât $[AD]$ este mediană în triunghi, să se calculeze măsura unghiului DAC .

Rezolvare. Fie BE înălțime în triunghiul ABC . Atunci $BE = BD = DC$ (cateta, ce se opune unghiului de 30°). În triunghiul dreptunghic BEC , ED este mediana corespunzătoare ipotenuzei, deci $ED = BD = DC$. Rezultă că triunghiul BED este echilateral, deci are măsurile unghiurilor de 60° . Obținem ușor că $m(\angle BAC) = 45^\circ$, deci $BE = AE$. Aceasta înseamnă că triunghiul AED este isoscel cu $AE = ED$ și $m(\angle AED) = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$. Dar atunci

$$m(\angle DAC) = (180^\circ - 150^\circ) : 2 = 15^\circ.$$



Problema 8.4. Să se arate, că oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea $x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2)$.

Rezolvare. Din inegalitatea dată obținem consecutiv:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 \geq xy(x^2 + y^2) &\Leftrightarrow x^4 + y^4 - x^3y - xy^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3(x - y) - y^3(x - y) \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)(x^3 - y^3) \geq 0 \Leftrightarrow \\ &(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \Leftrightarrow (x - y)^2 \left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \right] \geq 0. \end{aligned}$$

Ultima inegalitate este adevărată și este echivalentă cu cea din enunț. Afirmația este demonstrată.

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie, 2016

CLASA VIII-a, ziua întâi

BAREM DE CORECTARE

Notă: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctaj maxim.

Problema	Scor maxim	Răspuns corect	Etapele rezolvării	Punctaj acordat	Observații
8.1.	7p.	13; 11	- Alcătuirea ecuației $36x + 41y = 919$ - Aflarea soluțiilor în $\mathbb{Z}$: $x = -41n + 54$; $y = 36n - 25$ - Selectarea soluției în numere naturale	1p. 4p. 2p.	
8.2	7p.	$x = 5, y = 2$; $x = 3, y = 5$; $x = 5, y = 3$.	- Ecuația se aduce la forma $(x - y - 3)(x + y - 8) = 0$ - Se află soluția $x = 5, y = 2$ a ecuației $x - y - 3 = 0$ - Se află 2 soluții ale ecuației $x + y - 8 = 0$	3p. 2p. 2p.	
8.3	7p.	15°	- Obținerea $BE = BD = DC$ - Obținerea că $ED = BD = DC$ - Concluzia că $\triangle BED$ este echilateral - Obținerea că $BE = AE$ - Obținerea AED – isoscel, deci $m(\angle AED) = 150^\circ$ - Concluzia că $m(\angle DAC) = 15^\circ$	1p. 1p. 1p. 1p. 1p. 2p.	
8.4.	7p.		- Obținerea $(x - y)(x^3 - y^3) \geq 0$ - Obținerea $(x - y)^2(x^2 + xy + y^2) \geq 0$ - Obținerea $(x - y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right] \geq 0$	2p. 2p. 3p.	