

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA*Chişinău, 27 februarie – 2 martie 2015*

Clasa a VIII-a, prima zi

Soluții

8.1. Este dată mulțimea $M = \{1, 2, 3, \dots, 555\}$. Arătați, că mulțimea dată poate fi împărțită în trei submulțimi A, B și C astfel încât $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ și suma numerelor din fiecare submulțime să fie aceeași.

Soluție:

Suma numerelor care formează mulțimea M este egală cu $\frac{556 \cdot 555}{2} = 154290$. Deci suma numerelor din fiecare submulțime trebuie să fie egală cu $154290 : 3 = 51430$.

Vom arăta că oricare 9 numere naturale consecutive pot fi împărțite în trei grupuri cu sume egale. Într-adevăr, fie numerele $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8$. Suma lor este egală cu $9n+36$, deci suma numerelor din fiecare grup trebuie să fie egală cu $3n+12$. Împărțirea e posibilă, de exemplu, în felul următor:

Primul grup: $n, n+4, n+8$;Al doilea grup: $n+1, n+6, n+5$;Al treilea grup: $n+2, n+3, n+7$.

Deoarece $555 = 9 \cdot 61 + 6$, rezultă că putem împărți elementele mulțimii M , cu excepția ultimelor 6, în 61 mulțimi a câte 9 numere consecutive pe care le atribuim mulțimilor A, B și C . Dar fiecare din aceste mulțimi poate fi împărțită în 3 grupuri cu sume egale.

Ultimele 6 numere, adică 550, 551, 552, 553, 554, 555 le grupăm în felul următor: 550 + 555; 551 + 554; 552 + 553. Fiecare pereche o atribuim mulțimilor A, B și C .

Deci problema este rezolvată.

8.2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x-1) = -2x + 3 - f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right)$.

a) determinați analitic funcția dată;

b) aflați distanța de la originea axelor de coordonate până la graficul funcției f ;c) determinați punctele $M(x, y)$ ale graficului funcției f cu proprietatea $|y| = x$.**Soluție:**

a) Substituind $x = 4$ și $x = \frac{7}{2}$ în formula analitică a funcției f obținem:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(4-1) = -2 \cdot 4 + 3 - f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right) \\ f\left(\frac{7}{2}-1\right) = -2 \cdot \frac{7}{2} + 3 - f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(3) = -5 - f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right) \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -4 - f(3) - f\left(\frac{5}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(3) + f\left(\frac{5}{2}\right) = -5 \\ f(3) + 2f\left(\frac{5}{2}\right) = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(3) = -2 \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Substituind aceste valori în relația din enunț se obține: $f(x-1) = -2x + 6$, de unde

$$f(x-1) = -2(x-1) + 4.$$

Substituind $x-1 = t$ se obține funcția $f(t) = -2t + 4$, de unde substituind $t = x$ se obține funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4.$$

Răspuns: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + 4$.

b) Deoarece $f(2) = 0$ și $f(0) = 4$ avem punctele $A(0; 4)$ și $B(2; 0)$ ale dreptei ce reprezintă graficul

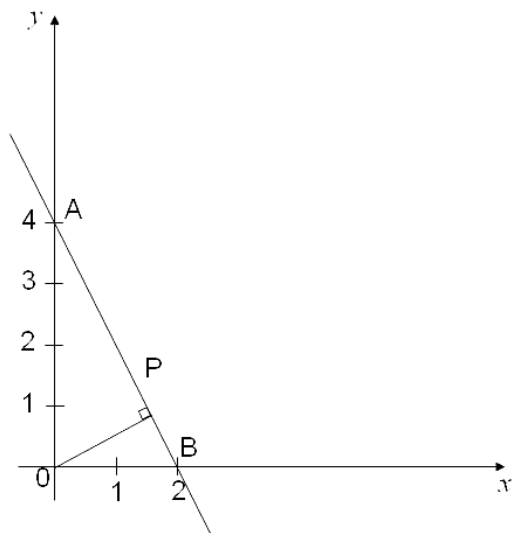
funcției f . Calculăm lungimea AB , aplicând teorema lui Pitagora: $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{5}.$$

Distanța de la originea de coordonate până la graficul funcției f o calculăm ca pe lungime înălțimii OP dusă

$$\text{la ipotenuza } AB: OP = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{4 \cdot 2}{2\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \Rightarrow OP = \frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Răspuns: $OP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.



c) Din ipoteză avem $|y| = x$ și deoarece $f(x) = -2x + 4$, atunci $y = -2x + 4$ și obținem $x = |-2x + 4|$, de unde rezultă,

$$\text{că } x \geq 0. \text{ Avem: } x = |-2x + 4| \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -2x + 4 \\ x = 2x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{4}{3} \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ x = 4 \end{cases}$$

Deoarece $|y| = x$ se obțin punctele $M_1\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ și $M_2(4; -4)$.

Răspuns: $M_1\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ și $M_2(4; -4)$.

8.3. Punctele E și F sunt situate pe laturile BC și respectiv CD ale pătratului $ABCD$, astfel încât $CF = BE$ și $BF \cap DE = \{G\}$. Demonstrați, că dreptele AG și EF sunt reciproc perpendiculare.

Soluție:

Unim punctul E cu punctele A și F și punctul A cu punctul F . Din ipoteză avem $CF = BE$ rezultă, că $DF = CE$. În baza criteriului LUL au loc următoarele congruențe: $\triangle BCF \equiv \triangle ABE$ și $\triangle ADF \equiv \triangle DCE$.

Fie $AE \cap BF = \{H\}$ și $DE \cap BF = \{G\}$.

Deoarece

$$\begin{aligned} m(\angle CFB) + m(\angle FBC) &= 90^\circ = m(\angle AEB) + m(\angle FBC) = \\ &= m(\angle HEB) + m(\angle HBE) = 90^\circ \\ \Rightarrow m(\angle BHE) &= 90^\circ \Rightarrow BH \perp AE \Rightarrow FH \perp AE. \end{aligned}$$

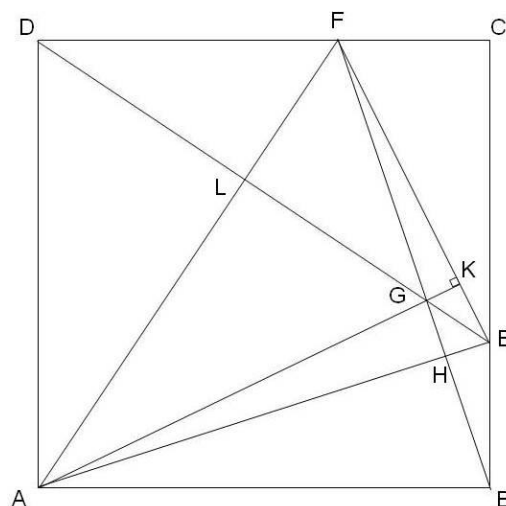
Analog, dacă $DE \cap AF = \{L\}$, atunci

$$\begin{aligned} m(\angle CDE) + m(\angle CED) &= 90^\circ = m(\angle CDE) + m(\angle AFD) = \\ &= m(\angle FDL) + m(\angle LFD) = 90^\circ \\ \Rightarrow m(\angle DLF) &= 90^\circ \Rightarrow DE \perp AF \Rightarrow EL \perp AF. \end{aligned}$$

Deci în $\triangle AEF$ înălțimile EL și FH sunt concurente în punctul G .

Dar cum cele trei înălțimi ale unui triunghi sunt concurente, rezultă, că și $AG \perp EF$.

Deci, dreptele AG și EF sunt reciproc perpendiculare.



8.4. Determinați toate perechile de numere raționale (x, y) , care satisfac egalitatea

$$16,5 - \left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 10\sqrt{2}.$$

Soluție: Avem $\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| \right)^2 = 16,5 - 10\sqrt{2}.$

Observăm, că se poate scrie $16,5 - 10\sqrt{2} = \frac{66 - 40\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{5\sqrt{2} - 4}{2} \right)^2.$

Deci egalitatea din enunț se poate scrie: $\left(\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2|\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right)^2$ sau

$$\frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| = \pm \frac{5\sqrt{2}-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| = \frac{5}{\sqrt{2}} - 2 \\ \frac{|x-1|}{\sqrt{2}} - |y^2 - 2| = -\frac{5}{\sqrt{2}} + 2 \end{cases}.$$

Deoarece $x, y \in \mathbb{Q}$ și $|x-1| \geq 0$ avem (din prima egalitate): $\begin{cases} |x-1| = 5 \\ |y^2 - 2| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 5 \\ x-1 = -5 \\ y^2 - 2 = 2 \\ y^2 - 2 = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$(x, y) \in \{(6, 2); (6, -2); (6, 0); (-4, 2); (-4, -2); (-4, 0)\}.$

Răspuns: $(x, y) \in \{(6, 2); (6, -2); (6, 0); (-4, 2); (-4, -2); (-4, 0)\}.$

BAREM DE CORECTARE

Problema	Răspuns corect	Etapile rezolvării	Punctaj acordat
8.1 7 p.	Mulțimea poate fi împărțită în trei submultimi cu suma numerelor în fiecare egală cu 51430	- A determinat, că suma numerelor care formează mulțimea M este egală cu 154290 și a determinat, că suma numerelor din fiecare mulțime este egală cu 51430. - A arătat, că oricare 9 numere naturale consecutive pot fi împărțite în trei grupuri cu sume egale: $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8$ și că suma lor este egală cu $9n+36$ și suma numerelor din fiecare grup trebuie să fie egală cu $3n+12$. - A împărțit cele trei grupe în felul următor: Primul grup: $n, n+4, n+8$; Al doilea grup: $n+1, n+6, n+5$; Al treilea grup: $n+2, n+3, n+7$. - A împărțit ultimele 6 numere, adică 550, 551, 552, 553, 554, 555 și le-a grupăm în felul următor: 550 + 555; 551 + 554; 552 + 553, fiecare pereche atribuind-o mulțimilor A, B și C. - A concluzionat, că mulțimea M poate fi împărțită în trei submultimi	1 p. 2 p. 2 p. 1 p. 1 p.
8.2 7 p.	a) $f: R \rightarrow R, f(x) = -2x + 4$ b) $OP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ c) $M_1\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ și $M_2(4; -4)$	- A determinat analitic funcția $f: R \rightarrow R, f(x) = -2x + 4$ - A calculat distanța de la originea de coordonate până la graficul funcției $f: OP = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. - A determinat cele 2 puncte cu proprietatea cerută: $M_1\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$ și $M_2(4; -4)$.	3 p. 2 p. 2 p.
8.3 7 p.	Dreptele AG și EF sunt reciproc perpendiculare	- Desen corect și concluzia, că $DF=CE$ - A demonstrat, că $BH \perp AE \Rightarrow FH \perp AE$ - A demonstrat, că $EL \perp AF$ - A concluzionat, că cele 3 înălțimi ale unui triunghi sunt concurente, rezultă, că și $AG \perp EF \Rightarrow$ dreptele AG și EF sunt reciproc perpendiculare.	1 p. 3 p. 2p. 1 p.
8.4 7 p.	Mulțimea perechilor (x, y) este: $(6, 2); (6, -2);$ $(6, 0); (-4, 2);$ $(-4, -2); (-4, 0)$	- A observat și a dedus, că $16,5 - 10\sqrt{2} = \left(\frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right)^2$ - A obținut $\frac{ x-1 }{\sqrt{2}} - y^2 - 2 = \pm \frac{5\sqrt{2}-4}{2}$ și (sau) totalitatea - A obținut sistemul $\begin{cases} x-1 = 5 \\ y^2 - 2 = 2 \end{cases}$ - A obținut soluțiile: $(x, y) \in \{(6, 2); (6, -2); (6, 0); (-4, 2); (-4, -2); (-4, 0)\}$	2 p. 2 p. 1 p. 2 p.

NOTĂ: Oricare altă metodă de rezolvare corectă se apreciază cu punctajul maxim.