

Soluție: 7.5 (1) Din condițiile problemei, turiștii pot avea vârstele 20, 21, 22, ..., 35 de ani.

(2) În total avem 16 posibilități.

(3) Deoarece sunt 20 de turiști și, dacă am presupune că fiecare are vârstă diferită, atunci ar trebui să avem 20 de posibilități pentru vârstă.

(4) Cum în total sunt 16 posibilități, concludem că sunt turiști de aceeași vârstă.

Barem: 7.5: Pentru: (1) – 1 punct; (2) – 2 puncte; (3) – 2 puncte; (4) – 2 puncte.

Soluție: 7.6: (1) $E = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4x + 4} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2} =$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 2y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 2y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + 2(y-1)^2} =$$

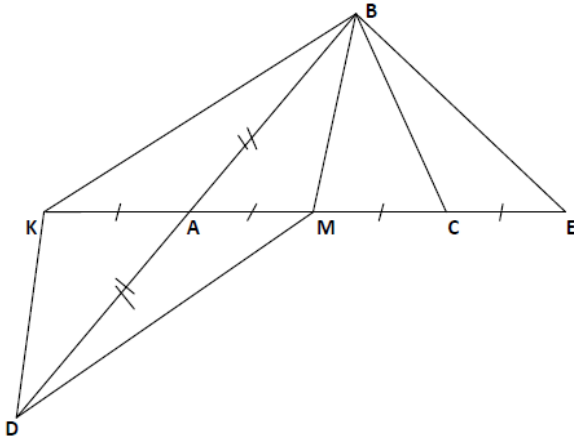
$$(2) = \sqrt{(5y)^2 + 2y^2} + \sqrt{(5y-5)^2 + 2(y-1)^2} = \sqrt{27y^2} + \sqrt{27(y-1)^2} =$$

$$(3) = |y| \sqrt{27} + |y-1| \sqrt{27} =$$

$$(4) = y\sqrt{27} - (y-1)\sqrt{27} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

Barem: 7.6: Pentru: (1) – 2 puncte; (2) – 1 punct; (3) – 2 puncte; (4) – 2 puncte.

Soluție: 7.7:



(1) Pe dreapta AC în exteriorul segmentului $[AC]$ alegem punctul K astfel încât $AK = AM$.

Obținem $KM = BM = ME = AC$.

(2) $\triangle BAK \equiv \triangle DAM$ - cazul LUL, deci

$m(\angle ADM) = m(\angle ABK)$ și $BK \parallel DM$.

(3) $KM = 2 \cdot AM = BM$, rezultă că

$\triangle BMK$ este isoscel și

$m(\angle BKM) = m(\angle KBM)$, deci

$$m(\angle KBM) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle BMK)).$$

(4) $ME = 2 \cdot MC = BM$, rezultă că $\triangle BME$ este isoscel și

$$m(\angle BEM) = m(\angle EBM), \text{ deci } m(\angle EBM) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle BME)).$$

(5) Atunci

$$m(\angle KBE) = m(\angle KBM) + m(\angle EBM) = \frac{1}{2}(180^\circ - m(\angle BME)) + 180^\circ - m(\angle BMK)) =$$

$$= \frac{1}{2}[360^\circ - (m(\angle BME) + m(\angle BMK))] = \frac{1}{2}[360^\circ - 180^\circ] = 90^\circ.$$

Deci $KB \perp BE$, și cum $BK \parallel DM$, obținem $DM \perp BE$.

Barem: 7.7: Pentru: (1) – 2 puncte; (2) – 2 puncte; (3) – 1 punct; (4) – 1 punct; (5) – 1 punct.

Soluție: 7.8:

(1) Dacă $z=0$ sau $t=0$, atunci, cum x, y, z, t sunt nenegative, obținem $x=y=z=t=0$.

(2) Dacă $x=0 \Rightarrow y=z^2$, $y^2=t^2$ deci $z^4=t^2$ sau $t=z^2$. Așadar avem soluțiile $\{(0, z^2, z, z^2) | z \in \mathbb{N}\}$.

(3) Dacă $y=0 \Rightarrow x=t^2$, $x^2=z^2$ deci $t^4=z^2$ sau $z=t^2$. Astfel avem soluțiile $\{(t^2, 0, t^2, t) | t \in \mathbb{N}\}$.

(4) Presupunem $x > 0, y > 0$. Atunci din prima ecuație avem $x^2 < z^2$, deci $x < z$ și atunci $x+1 \leq z$. Din prima ecuație a sistemului avem $y = z^2 - x^2 \geq (x+1)^2 - x^2 = 2x+1 > x$, deci $y > x$.

(5) Tot pentru $x > 0, y > 0$, din a doua ecuație avem $y^2 < t^2$ deci $y < t$ și atunci $y+1 \leq t$. Din a doua ecuație a sistemului avem $x = t^2 - y^2 \geq (y+1)^2 - y^2 = 2y+1 > y$, deci $x > y$.

Astfel am primit $y > x$ și $x > y$, contradicție. Rezultă că sistemul nu are soluții în acest caz.

Barem: 7.8: Pentru: (1) – 1 punct; (2) – 2 puncte; (3) – 1 punct; (4) – 2 puncte; (5) – 1 punct.