

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a VII-a, ziua a doua

Soluții

7.5. Demonstrați că pentru orice număr natural n , numerele n și $n^2 + 6n + 12$ nu pot fi simultan cuburile a două numere naturale.

Soluție:

Cazurile $n = 0, 1$ se verifică ușor.

Să observăm că dacă a și b sunt cuburile a două numere naturale, atunci ab , de asemenea, este cubul unui număr natural.

Examinăm produsul $n(n^2 + 6n + 12)$. Să arătăm că el nu este cubul unui număr natural.

$$n(n^2 + 6n + 12) = n^3 + 6n^2 + 12n + 8 - 8 = (n + 2)^3 - 8. \quad (1)$$

$$(k + 1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1 > 8, \text{ pentru } n > 1. \quad (2)$$

Deci, diferența dintre cuburile a două numere naturale consecutive mai mari ca 1 este mai mare decât 8.

Evident, aceasta diferență va crește dacă numerele nu sunt consecutive. (3)

Deci, dacă presupunem că $n(n^2 + 6n + 12) = t^3$, atunci, luând în considerație (1), obținem că $(n + 2)^3 - t^3 = 8$, ceea ce contrazice (2) și (3). (q.e.d)

7.6. Numerele naturale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ satisfac relațiile $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \leq 12m$ și

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq 2M^2$, unde m și M sunt respectiv cel mai mic și cel mai mare dintre numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$.

Aflați valoarea lui m dacă $M = 3^{2015}$.

Soluție:

$$9m + M \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \leq 12m \quad (1),$$

$$9m^2 + M^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq 2M^2. \quad (2)$$

Din (1) și (2) obținem $M \leq 3m$ și $9m^2 \leq M^2$. Prin urmare, $M = 3m$, adică $m = 3^{2014}$.

Răspuns: 3^{2014} .

7.7. O foaie dreptunghiulară a fost pliată astfel, încât colțul stînga-sus coincide cu mijlocul laturii de jos (vezi desenul).

Aflați lungimile laturilor dacă triunghiurile 1 și 2 din desen sunt congruente, iar aria dreptunghiului corespunzător foi este egală cu 486 cm^2 .

Soluție:

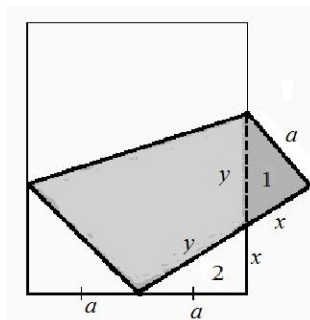
Lungimea laturii mici este $2a = x + y$.

Lungimea laturii mari este $x + y + a = 3a$.

Aria dreptunghiului este $3a \times 2a = 6a^2$.

Obținem că $6a^2 = 486$ sau $a^2 = 81$, adică $a = 9 \text{ (cm)}$.

Răspuns: 18 cm și 27 cm.



7.8. Pentru ce valori naturale ale lui x valoarea expresiei $\sqrt{x-41} + \sqrt{x}$ este număr natural?

Soluție:

Din $\sqrt{x-41} + \sqrt{x} = y \Rightarrow \sqrt{x} = y^2 - x + 41$, deci $\sqrt{x} \in \mathbb{N}$ și atunci $x = k^2, k \in \mathbb{N}$. Ecuația este echivalentă cu $k^2 + k - 41 = y^2 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4y^2 + 165 \Rightarrow (2k+1)^2 - (2y)^2 = 165$.

Deci $(2k+1-2y) \cdot (2k+1+2y) = 3 \cdot 55$ sau $(2k+1-2y) \cdot (2k+1+2y) = 5 \cdot 33$, sau $(2k+1-2y) \cdot (2k+1+2y) = 11 \cdot 15$ sau $(2k+1-2y) \cdot (2k+1+2y) = 1 \cdot 165$.

Cum $x, y \in \mathbb{N}$, deducem că:
$$\begin{cases} 2k+2y+1=55 \\ 2k-2y+1=3 \end{cases} \Rightarrow k=14. \text{ Deci, } x=196.$$

Similar aflăm soluțiile 81, 36, 1681.

Răspuns: {36, 81, 196, 1681}.

Barem de corectare

	Problema 7.5	Puctaj
1.	Examinarea produsului $n(n^2 + 6n + 12)$	2
2.	Reprezentarea $n(n^2 + 6n + 12) = (n + 2)^3 - 8$	2
3.	Concluzia: Diferența dintre cuburile a două numere naturale consecutive mai mari ca 1 este mai mare decât 8	2
4.	Concluzia finală corectă	1
	Total	7
	Problema 7.6	
1.	Scrierea relației $9m + M \leq a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} \leq 12m$	2
2.	Scrierea relației $9m^2 + M^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{10}^2 \leq 2M^2$	2
3.	Obținerea relațiilor $M \leq 3m$ și $9m^2 \leq M^2$	1
4.	Concluzia $M = 3m$	1
5.	Răspunsul corect	1
	Total	7
	Problema 7.7	
1.	Scrierea relației $2a = x + y$	2
2.	Scrierea relației $x + y + a = 3a$	3
3.	Calcularea valorii lui a	1
4.	Răspunsul corect	1
	Total	7
	Problema 7.8	
1.	Obținerea relației $k^2 + k - 41 = y^2$	1
2.	Efectuarea transformărilor $k^2 + k - 41 = y^2 \Rightarrow 4k^2 + 4k + 1 = 4y^2 + 165 \Rightarrow (2k + 1)^2 - (2y)^2 = 165.$	2
3.	Obținerea sistemelor de forma $\begin{cases} 2k + 2y + 1 = m \\ 2k - 2y + 1 = n \end{cases}$, unde $mn = 165$ și $m > n$	2
4.	Rezolvarea sistemelor	1
5.	Răspunsul corect	1
	Total	7