

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a VII-a, prima zi

Soluție: 7.1 (1) Pentru $a = 0$ obținem $\frac{0}{b+1} + \frac{b}{0+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{1} = 1 \Leftrightarrow b = 1$, astfel avem

soluția $a = 0$, $b = 1$. Pentru $b = 0$ obținem $\frac{a}{0+1} + \frac{0}{a+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{1} = 1 \Leftrightarrow a = 1$, astfel avem soluția $a = 1$, $b = 0$.

(2) Pentru $a = b$ obținem $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} + \frac{a}{a+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{2a}{a+1} = 1 \Leftrightarrow 2a = a+1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = 1$, astfel avem soluția $a = 1$, $b = 1$.

(3) Pentru $0 < a < b$ obținem $0 < a < b < b+1$ și deci $0 < \frac{a}{b+1} < 1$. Deasemenea

$a+1 \leq b$ și deci $1 \leq \frac{b}{a+1}$. Astfel $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} > 1$.

(4) Pentru $0 < b < a$ obținem $0 < b < a < a+1$ și deci $0 < \frac{b}{a+1} < 1$. Deasemenea

$b+1 \leq a$ și deci $1 \leq \frac{b}{a+1}$. Astfel $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} > 1$. Deci, unicele soluții sunt

$(a, b) \in \{(0;1), (1;0), (1;1)\}$.

Soluție: (1) $\frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a(a+1) + b(b+1)}{(a+1)(b+1)} = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 + a + b^2 + b}{ab + a + b + 1} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2 + a + b^2 + b = ab + a + b + 1 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow$

(2) $\Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 1 - ab \Leftrightarrow (a-b)^2 = 1 - ab$.

(3) Cum $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow 1 - ab \geq 0 \Rightarrow ab \leq 1$ și cum $a, b \in \mathbb{N}$, obținem $ab \in \{0, 1\}$.

(4) Din $ab = 0$ obținem soluțiile $a = 0$ și astfel $\frac{0}{b+1} + \frac{b}{0+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{1} = 1 \Leftrightarrow b = 1$, sau $b = 0$ și

atunci $\frac{a}{0+1} + \frac{0}{a+1} = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{1} = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Din $ab = 1$, cum $a, b \in \mathbb{N}$, obținem $a = 1$, $b = 1$.

Deci soluțiile sunt $(a, b) \in \{(0;1), (1;0), (1;1)\}$.

Barem: 7.1: Pentru: **(1)** – 2 puncte; **(2)** – 2 puncte; **(3)** – 2 puncte; **(4)** – 1 punct.

Soluție: 7.2: **(1)** $a = \underbrace{11\dots1}_{2016\text{-ori}} \cdot \underbrace{100\dots05}_{2015\text{-ori}} + 1 = \underbrace{11\dots1}_{2016\text{-ori}} \cdot (\underbrace{100\dots0}_{2016\text{-ori}} + 5) + 1 =$

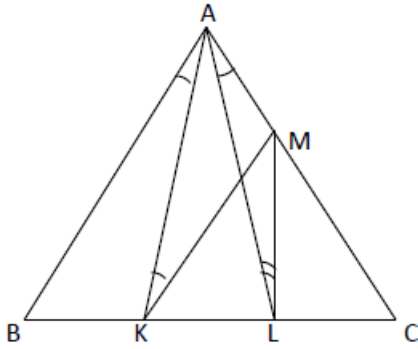
(2) $= \frac{10^{2016}-1}{9} \cdot (10^{2016} + 5) + 1.$

(3) Dacă notăm $10^{2016} = t$ obținem $a = \frac{t-1}{9} \cdot (t+5) + 1 = \frac{t^2 + 4t - 5}{9} + 1 =$

(4) $= \frac{t^2 + 4t + 4}{9} = \left(\frac{t+2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^{2016} + 2}{3}\right)^2$

(5) Evident $(10^{2016} + 2):3$ deoarece suma cifrelor numărului $10^{2016} + 2$ este 3. Deci numărul a este patrat perfect.

Barem: 7.2: Pentru: **(1)** – 1 punct; **(2)** – 2 puncte; **(3)** – 2 puncte; **(4)** – 1 punct; **(5)** – 1 punct.

Soluție:7.3:

(1) Din $AM : MC = 1 : 2$ rezultă $MC = 2 \cdot AM$, $\Rightarrow AC = 3 \cdot AM$. Cum $BC = BK + KL + LC = 3 \cdot BK$ și $AC = BC \Rightarrow AM = BK$.

(2) Deci $MC = KC$, $\Rightarrow \triangle MCK$ este isoscel și cum $m(\angle MCK) = 60^\circ$

$\Rightarrow m(\angle KMC) = m(\angle MKC) = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$.

$\Rightarrow \triangle MCK$ - echilateral.

(3) $m(\angle MKC) = m(\angle ABC) = 60^\circ \Rightarrow AB \parallel MK \Rightarrow m(\angle BAK) = m(\angle AKM)$.

(4) $AC = AB$, $BK = LC$, $m(\angle ABK) = m(\angle ACL) = 60^\circ$ (LUL)

$\Rightarrow \triangle ABK \equiv \triangle ACL$.

(5) $\Rightarrow m(\angle BAK) = m(\angle CAL)$.

(6) $\triangle MKC$ - echilateral și ML - mediană, $\Rightarrow ML$ - bisectoare, $\Rightarrow m(\angle CML) = 30^\circ$.

(7) $m(\angle AKM) + m(\angle ALM) = m(\angle LAM) + m(\angle ALM) = 180^\circ - m(\angle AML) = m(\angle CML) = 30^\circ$.

Barem: 7.3: Pentru: (1) – (7) –cîte 1 punct.

Soluție: 7.4:

(1) Efectuînd în cuvîntul RAC o rocadă, poate fi obținut doar unul dintre cuvintele: RCA; CAR; ARC.

(2) Din fiecare dintre aceste noi cuvinte, efectuînd o rocadă, poate fi obținut doar unul dintre cuvintele: RAC; ACR; CRA.

RCA: RAC, ACR, CRA.

CAR: CRA, RAC, ACR.

ARC: ACR, CRA, RAC.

(3) Din fiecare dintre cuvintele obținute la pasul (2), efectuînd o rocadă, poate fi obținut doar unul dintre cuvintele: RCA;CAR; ARC.

RAC: RCA, CAR, ARC.

ACR: ARC, RCA, CAR.

CRA: CAR, ARC, RCA.

(4) Deci după a treia rocadă pot fi obținute tot aceleași cuvinte care pot fi obținute după prima rocadă. În continuare rezultatele se vor repeta după fiecare două rocade consecutive.

(5) Observăm, că cuvîntul RAC poate fi obținut doar la a 2-a, a 4-a, a 6-a, 8-a, a 10-a, a 12-a, a 14-a, a 16-a, a 18-a ș.a.m.d.. Deci după 17 rocade consecutive nu se va obține din nou cuvîntul RAC.

Barem: 7.4: Pentru: (1) – 1 punct; (2) – 2 puncte; (3) – 1 punct; (4) – 2 puncte; (5) – 1 punct.