

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a VII-a, prima zi

Soluții

7.1. Demonstrați că numărul $S = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2015}$ este divizibil cu 100.

Soluție:

Observăm că $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$.

$$7S = 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2015} + 7^{2016} = 2800(1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12} + \dots + 7^{2012}).$$

Așadar, $7S$ se divide cu 100. Așa cum $\text{C.M.M.D.C.}(7, 100) = 1$, rezultă că S se divide cu 100. (q.e.d)

Metoda II. Observăm că $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$.

$$S = 400(1 + 7^4 + 7^8 + 7^{12} + \dots + 7^{2012}).$$

7.2. Aflați două numere naturale de 4 cifre fiecare, a căror produs este egal cu 11 111 111.

Soluție:

$$11\ 111\ 111 = 1\ 111 \times 10\ 001 = 11 \times 101 \times 10\ 001.$$

$$10\ 001 = 10^4 + 1 \text{ (are forma } 8k + 1, \text{ deci verificam numerele prime } 17, 41, 73) = 73 \times 137.$$

$$11\ 111\ 111 = 11 \times 101 \times 73 \times 137 = (101 \times 73) \times (11 \times 137) = 7373 \times 1507.$$

Răspuns: 11 111 111 = 7373 x 1507.

7.3. a) Fie x, y numere reale pozitive. Să se arate că $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2}$.

b) Să se arate că $(\forall)n \in \mathbb{N}$ avem: $\sqrt{\frac{1^2 + 2^2}{2}} + \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{2}} + \dots + \sqrt{\frac{(n-1)^2 + n^2}{2}} \geq \frac{n(n+1)}{4}$.

Soluție:

$$\text{a)} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{xy}{2} \Big| \cdot 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 \geq x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

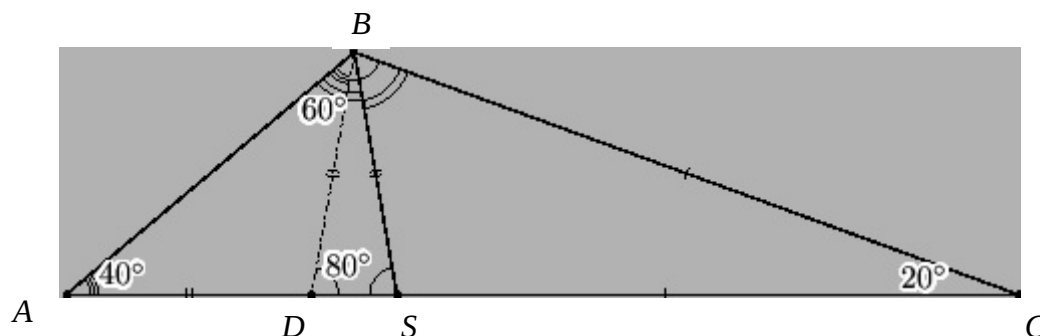
(A).

b)

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{\frac{1^2 + 2^2}{2}} \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{2} \\ \sqrt{\frac{3^2 + 4^2}{2}} \geq \frac{3}{2} + \frac{4}{2} \\ \sqrt{\frac{5^2 + 6^2}{2}} \geq \frac{5}{2} + \frac{6}{2} \\ \dots\dots\dots \\ \sqrt{\frac{(n-1)^2 + n^2}{2}} \geq \frac{n-1}{2} + \frac{n}{2} \end{array} \right| + \Rightarrow S \geq \frac{1+2+3+\dots+n}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$$

7.4. Măsurile a două unghiuri ale unui triunghi sunt egale cu 20° și 40° , iar diferența lungimilor laturilor mai mari este egală cu 18 cm. Aflați lungimea bisectoarei triunghiului dusă din vârful celui de-al treilea unghi.

Soluție:



Fie triunghiul ABC cu unghiurile A și C respectiv de 40° și 20° (vezi desenul), iar $[BS]$ – bisectoarea dusă din unghiul B . Construim pe latura AC punctul D , astfel încât $CD = CB$. Prin urmare, unghiurile B și D ale triunghiului isoscel CBD sunt congruente, având fiecare măsura de 80° .

$$m(\angle SBC) = m(\angle ABS) = \frac{1}{2} \cdot m(\angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

$$m(\angle DBS) = m(\angle DBC) - m(\angle SBC) = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ.$$

Analizând triunghiul DBS observăm că

$$m(\angle DSB) = 180^\circ - m(\angle BDS) - m(\angle DBS) = 180^\circ - 80^\circ - 20^\circ = 80^\circ.$$

Deci, $\triangle BDS$ este isoscel cu $[BD] \equiv [BS]$. (1)

$$m(\angle ABD) = m(\angle ABS) - m(\angle DBS) = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Prin urmare, triunghiul ADB este isoscel și $[AD] \equiv [BD]$. (2)

Din (1) și (2) rezultă că $[BS] \equiv [AD]$.

Prin urmare, $BS = AD = AC - DC = AC - BC = 18$ (cm).

Răspuns: 18 cm

Barem de corectare

	Problema 7.1	Scor acordat
1.	Observația că $1 + 7 + 7^2 + 7^3 = 400$ sau că $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 2800$	3
2.	Gruparea a câte 4 termeni	2
3.	Scoaterea factorului comun	1
4.	Concluzia corectă	1
	Total	7
	Problema 7.2	
1.	Descompunerea $11\ 111\ 111 = 1\ 111 \times 10\ 001 = 11 \times 101 \times 10\ 001$	2
2.	Prezentarea $10\ 001 = 10^4 + 1$	1
3.	Descompunerea $10\ 001 = 73 \times 137$	2
4.	Descompunerea $11\ 111\ 111 = (101 \times 73) \times (11 \times 137) = 7373 \times 1507$	2
	Total	7
	Problema 7.3	
1.	Deducerea relației $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \quad (1)$	3
2.	Utilizarea relației (1) pentru fiecare membru stîng al relației b)	1
3.	Calcularea sumei primelor n numere naturale	2
4.	Concluzia corectă	1
	Total	7
	Problema 7.4	
1.	Desen corect	1
2.	Construirea punctului D	1
3.	Demonstrarea relației $[BD] \equiv [BS]$.	2
4.	Demonstrarea relației $[AD] \equiv [BD]$.	2
5.	Determinarea lungimii bisectoarei	1
	Total	7