

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a XII-a, ziua a doua

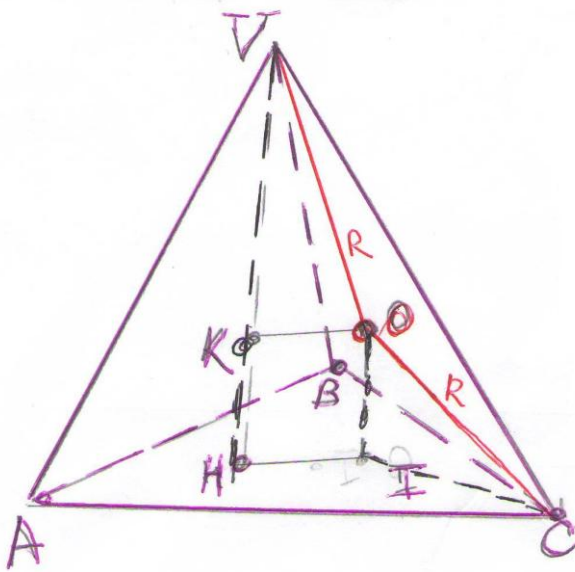
SOLUȚII

12.5. Funcția $f : [1, 2016] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x[x]$ este monotonă, deci integrabilă. Avem

$$I = \int_1^2 x dx + \int_2^3 2x dx + \int_3^4 3x dx + \dots + \int_{2015}^{2016} 2015x dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2015} kx^2 \Big|_k^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2015} (2k^2 + k) =$$

$$\frac{2015 \cdot 2016 \cdot 4031}{6} + \frac{2015 \cdot 2016}{4} = 2015 \cdot \left(\frac{2016 \cdot 4031}{6} + \frac{2016}{4} \right)$$

12.6.



Fie I centrul cercului circumscris bazei, iar O centrul sferei ce conține vîrfurile piramidei. Avem

$OI \perp (ABC)$. Fie H piciorul înălțimii. IC este raza cercului circumscris bazei și $IC = \frac{AC}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Fie

R raza sferei. $R^2 = OI^2 + IC^2 \Rightarrow R^2 = OI^2 + 27$.

Fie $OK \perp VH \Rightarrow HK = OI$. Atunci din ΔVKO avem $VO^2 = R^2 = VK^2 + OK^2$.

$$\text{Dacă } K \in (VH), \text{ atunci } R^2 = (VH - OI)^2 + HI^2 \Rightarrow R^2 = 36 - 12OI + OI^2 + HI^2 \Rightarrow OI = \frac{9 + HI^2}{12}.$$

$$\text{Obținem: } R^2 = 27 + \left(\frac{9 + HI^2}{12} \right)^2.$$

Evident, R este minimă dacă $HI = 0 \Rightarrow R = \frac{21}{4} \text{ cm}$.

$$\text{Dacă } H \in (VK), \text{ atunci } VK = VH + HK = 6 + OI \Rightarrow R^2 = (6 + OI)^2 + HI^2 \Rightarrow$$

$$R^2 = 36 + 12OI + OI^2 + HI^2 \Rightarrow 27 = 36 + 12OI + HI^2 \text{ - relație imposibilă.}$$

$$\text{Răspuns: } R = \frac{21}{4} \text{ cm.}$$

12.7. Avem

$$\int_0^1 x^4 f(x^2) dx + \int_0^1 x f(x) f'(x) dx = \frac{5}{32} \Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f(x^2) dx + \int_0^1 x \left(\frac{f^2(x)}{2} \right)' dx = \frac{5}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f(x^2) dx + x \cdot \frac{f^2(x)}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} dx = \frac{5}{32} \Leftrightarrow \int_0^1 x^4 f(x^2) dx + \frac{1}{8} - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{2} \cdot 2x dx = \frac{5}{32} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 (x^4 f(x^2) - x f^2(x^2)) dx = \frac{1}{32} \Leftrightarrow \int_0^1 x \left(f^2(x^2) - x^3 f(x^2) + \frac{x^6}{4} - \frac{x^6}{4} \right) dx = -\frac{1}{32} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 x \cdot \left(f(x^2) - \frac{x^3}{2} \right)^2 dx - \frac{x^8}{32} \Big|_0^1 = -\frac{1}{32} \Leftrightarrow \int_0^1 x \left(f(x^2) - \frac{x^3}{2} \right)^2 dx = 0$$

$$\text{Cum } x \cdot \left(f(x^2) - \frac{x^3}{2} \right)^2 \geq 0 \text{ pe } [0,1] \Rightarrow f(x^2) = \frac{x^3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2}.$$

$$\text{Răspuns: } f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2}.$$

12.8.

$$X = A_1 - A_2 + A_3 - \dots + A_{1007} - A_{1008} \Rightarrow I_2 - X = I_2 - A_1 + A_2 - A_3 + \dots - A_{1007} + A_{1008} \Rightarrow$$

$$I_2 - X = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \text{ unde } a = C_{2016}^0 - C_{2016}^2 + C_{2016}^4 - \dots + C_{2016}^{2016}, \quad b = -C_{2016}^1 + C_{2016}^3 - C_{2016}^5 + \dots + C_{2016}^{2015}.$$

$$\text{Avem: } (1+i)^{2016} = C_{2016}^0 + iC_{2016}^1 - C_{2016}^2 - iC_{2016}^3 + C_{2016}^4 + iC_{2016}^5 - \dots + C_{2016}^{2016} = a - bi,$$

$$(1-i)^{2016} = C_{2016}^0 - iC_{2016}^1 - C_{2016}^2 + iC_{2016}^3 + C_{2016}^4 - iC_{2016}^5 - \dots + C_{2016}^{2016} = a + bi.$$

Atunci

$$\det(I_2 - X) = a^2 + b^2 = (a - bi)(a + bi) = (1+i)^{2016} \cdot (1-i)^{2016} = (1-i^2)^{2016} = 2^{2016}$$

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a XII-a, ziua a doua

BAREM DE CORECTARE

PROBLEMA 12.5.		Punctaj acordat
Scrierea $\int_1^{2016} x[x]dx = \sum_{k=1}^{2015} \int_k^{k+1} x[x]dx$		1 punct
$\int_1^{2016} x[x]dx = \sum_{k=1}^{2015} \int_k^{k+1} kxdx$		2 puncte
Obținerea $\int_1^{2016} x[x]dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2015} kx^2 \Big _k^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2015} (2k^2 + k)$		1 punct
$\sum_{k=1}^{2015} k^2 = \frac{2015 \cdot 2016 \cdot 4031}{6}$		1 punct
$\sum_{k=1}^{2015} k = \frac{2015 \cdot 2016}{2}$		1 punct
Demonstrarea afirmației		1 punct
Total		7 puncte
PROBLEMA 12.6.		
Proiecția centrului sferei pe planul bazei - centrul cercului circumscris bazei		1 punct
Cercetarea cazului când V și O se află în semiplane diferite în raport cu planul ABC		2 puncte
Demonstrarea că raza minimă se obține în cazul piramidei regulate		2 puncte
Determinarea razei minime		2 puncte
Total		7 puncte
PROBLEMA 12.7.		
Aplicarea integrării prin părți pentru $\int_0^1 xf(x)f'(x)dx$		2 puncte
Substituția $x = t^2$ sau $t = x^2$		1 punct
Obținerea $\int_0^1 x \left(f(x^2) - \frac{x^3}{2} \right)^2 dx = 0$		2 puncte
Determinarea lui f		2 puncte
Total		7 puncte
PROBLEMA 12.8.		
$I_2 - X = \begin{pmatrix} C_{2016}^0 - C_{2016}^2 + C_{2016}^4 - \dots + C_{2016}^{2016} & 0 \\ 0 & C_{2016}^0 - C_{2016}^2 + C_{2016}^4 - \dots + C_{2016}^{2016} \end{pmatrix}$		1 punct
Dezvoltarea binoamelor $(1+i)^{2016}$, $(1-i)^{2016}$		2 puncte
Calcularea sumei $C_{2016}^0 - C_{2016}^2 + C_{2016}^4 - \dots + C_{2016}^{2016}$		2 puncte
Determinarea lui $\det(I_2 - X) = 2^{2016}$		2 puncte
Total		7 puncte