

Ziua a doua

12.5. a) $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} (e^{-2x} + e^{2x}) dx = \frac{1}{2} (e^{2x} - e^{-2x}) \Big|_{-\ln 2}^{\ln 2} = \frac{15}{4}$

b)

$$I = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} (e^{-2x} + e^{2x}) \arccos x dx = \left. \begin{array}{l} x = -t \\ dx = -dt \\ \arccos(-t) = \pi - \arccos t \\ t \in [\ln 2; -\ln 2] \end{array} \right| = \int_{-\ln 2}^{\ln 2} (e^{2t} + e^{-2t}) (\pi - \arccos t) dt =$$

$$= \pi \int_{-\ln 2}^{\ln 2} (e^{2t} + e^{-2t}) dt - I.$$

Obținem: $2I = \pi \cdot \frac{15}{4} \Rightarrow I = \frac{15\pi}{8}.$

12.6.

Avem: $X^{2016} = X \cdot X^{2015} = X \cdot X^{2015} = X \cdot A; X^{2016} = X^{2015} \cdot X = A \cdot X \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A.$

Fie $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ x & y & z \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = \begin{pmatrix} -a+3x & -b+3y & -c+3z \\ m & n & p \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -a & b & 3a+2c \\ -m & n & 3m+2p \\ -x & y & 3x+2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0; b=0 \\ m=0; p=0 \\ y=0; c=z-a \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \gamma-\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Prin inducție,

$$X^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & \gamma^n - \alpha^n \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha^{2015} & 0 & \gamma^{2015} - \alpha^{2015} \\ 0 & \beta^{2015} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^{2015} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^{2015} = -1 \\ \beta^{2015} = 1 \\ \gamma^{2015} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = \sqrt[2015]{2} \end{cases}$$

Deci, $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt[2015]{2} + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[2015]{2} \end{pmatrix}.$

12.7. Fie β - un plan, astfel încât $AB \subset \beta$, $VC \parallel \beta$.

Fie $VM \perp \beta$, $CN \perp \beta$, $M, N \in \beta \Rightarrow MN \parallel VC$, $MN = VC = 8cm$, $MNCV$ - dreptunghi și

$$\sphericalangle(AB, CV) \equiv \sphericalangle(AB, MN) \equiv \alpha.$$

Considerăm poliedrul $MANBCV$. Avem:

$$V_{MANBCV} = V_{VAMB} + V_{VACB} + V_{ANBC} = V_{AMNCV} + V_{BMNCV}$$

$$\left. \begin{array}{l} V_{VAMB} = \frac{1}{3} VM \cdot A_{MAB} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot A_{MAB} = 2 \cdot A_{MAB}; \\ V_{ANBC} = \frac{1}{3} CN \cdot A_{NAB} = 2 \cdot A_{NAB} \end{array} \right\} \Rightarrow V_{VAMB} + V_{ANBC} = 2(A_{MAB} + A_{NAB}) = 2 \cdot A_{MANB} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot MN \cdot \sin \alpha = 96 \sin \alpha.$$

Fie $AK \perp MN$, $BR \perp MN \Rightarrow AK + BR = AB \sin \alpha$. Avem:

$$V_{AMNCV} = \frac{1}{3} AK \cdot A_{VMNC} = \frac{1}{3} \cdot AK \cdot 48 = 16 \cdot AK.$$

Analog, $V_{BMNCV} = 16 \cdot BR$.

În final obținem:

$$96 \sin \alpha + 48 = 16AK + 16BR \Rightarrow 96 \sin \alpha + 48 = 16 \cdot AB \sin \alpha \Rightarrow 96 \sin \alpha + 48 = 16 \cdot 12 \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle \alpha) = 30^\circ.$$

12.8.

Fie F o primitivă a funcției f . Avem:

$$F(x) - F(-x) = 2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow F'(x) + F'(-x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f(x) + f(-x) = \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$$

$$f(x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\left(f(-x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right). \text{ Notăm } h(x) = f(x) - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$$

$$h(x) = -h(-x) \Rightarrow h \text{ este impară. Avem } f(x) = h(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Avem: } \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \int_{-1}^1 \left(h(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx = \int_{-1}^1 h^2(x) dx + 2 \int_{-1}^1 h(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

$$\text{Dar } h(x) \frac{1}{1+x^2} \text{ este funcție impară, de unde } \int_{-1}^1 h(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = 0; \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{În final, } \frac{\pi}{2} = \int_{-1}^1 h^2(x) dx + \frac{\pi}{2} \Rightarrow h^2(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

ZIUA A DOUA
PROBLEMA 12.5

- a) Calcularea integralei $\int_{-\ln 2}^{\ln 2} (e^{-2x} + e^{2x}) dx = \frac{15}{4}$ 3puncte
- b) - Substituția $x = -t$ 1punct
- $\arccos(-t) = \pi - \arccos t$ 1punct
- Obținerea valorii integralei2puncte

PROBLEMA 12.6.

- Demonstrarea: $A \cdot X = X \cdot A$ 2puncte
- Obținerea lui X sub forma $\begin{pmatrix} a & 0 & c-a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ 2puncte .
- Demonstrarea prin inducție $X^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & c^n - a^n \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ 2puncte .
- Obținerea lui $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt[2015]{2} + 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[2015]{2} \end{pmatrix}$ 1punct

PROBLEMA 12.7.

- Identificarea unui plan β , astfel încât $AB \subset \beta$, $VC \parallel \beta$ 1punct
- Reprezentarea volumului poliedrului $MANBCB$ sub două forme2puncte
- Determinarea $m(\angle \alpha) = 30^\circ$ din egalitatea volumelor4puncte

PROBLEMA 12.8.

- Căutarea lui $f(x) = h(x) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 2puncte
- Demonstrarea că $h(x)$ este impară2puncte
- Determinarea $h(x) = 0$ 2puncte
- Determinarea lui $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 2puncte