

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a XII-a, prima zi

Soluții

12.1. Fie $x-1=t$, $dx=dt$. Obținem

$$\int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt - \int \frac{2t^2}{(t^2+1)^2} dt =$$

$$\int \frac{1}{1+t^2} dt + \int t \left(\frac{1}{1+t^2} \right)' dt = \int \frac{1}{1+t^2} dt + \frac{t}{1+t^2} - \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{t}{1+t^2} + C$$

Deci, $F(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2} + C.$

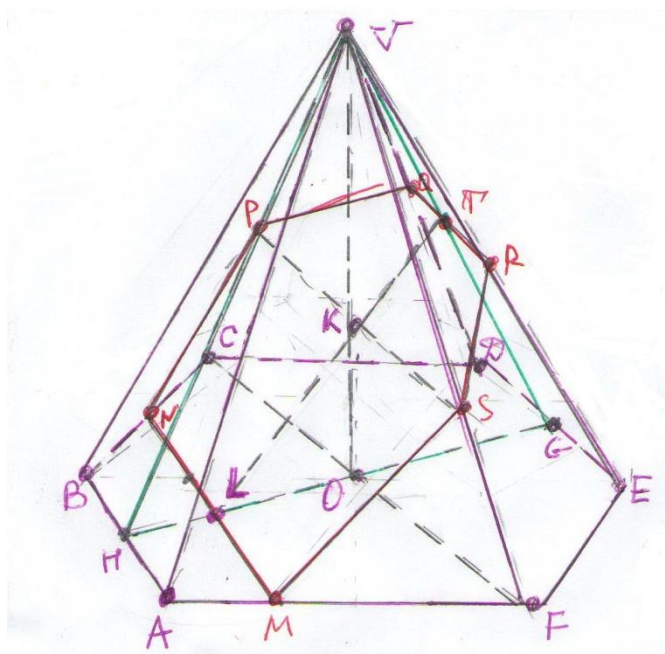
Să determinăm valorile lui C , pentru care ecuația $\frac{x-1}{x^2-2x+2} + C = 0$ -are două soluții.

Evident, $C \neq 0$. Ecuația $Cx^2 + (1-2C)x + 2C-1 = 0$ trebuie să aibă două soluții.

$$\Delta > 0 \Rightarrow 1-4C^2 > 0 \Leftrightarrow C \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Răspuns: $F(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2} + C, . C \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$

12.2



Fie $MNPQRS$ secțiunea obținută, unde $M \in AF$, $N \in BC$, $P \in VC$, $Q \in VD$, $R \in VE$, $S \in VF$.

Notăm $AB = x$, $VH = y$ - înălțimea feței VAB . Fie S aria feței $VAB \Rightarrow xy = 2S$.

Exprimăm aria secțiunii $MNPQRS$ prin x și y .

Avem $MN \parallel AB$, $CF = 2x$, $PS \parallel QR \parallel MN$.

Fie VG înălțimea feței VDE ; $GV \cap QR = \{T\}$, $TK \cap MN = \{L\}$, L - mijlocul lui MN .

$$KL \square VH \Rightarrow \frac{VK}{KO} = \frac{HL}{LO} \Rightarrow \frac{HL}{LO} = 2 \Rightarrow HL = 2LO \Rightarrow HO = 3LO \Rightarrow \frac{HL}{HO} = \frac{2LO}{3LO} = \frac{2}{3} \Rightarrow MN = \frac{5}{3}x;$$

$$\Delta VCF \square \Delta VPS \Rightarrow \frac{PS}{CF} = \frac{VK}{VO} = \frac{2}{3} \Rightarrow PS = \frac{4}{3}x;$$

$$KL \square VH \Rightarrow \frac{KL}{VH} = \frac{KO}{VO} = \frac{1}{3} \Rightarrow KL = \frac{y}{3};$$

$$TL \square VH \Rightarrow \frac{TL}{VH} = \frac{GL}{GH} = \frac{HO + OL}{2HO} = \frac{2}{3} \Rightarrow TL = \frac{2y}{3};$$

$$TK = TL - KL = \frac{2y}{3} - \frac{y}{3} = \frac{y}{3}.$$

$$QT \square DG \Rightarrow \frac{QT}{\frac{x}{2}} = \frac{VT}{VG} = \frac{HL}{HG} = \frac{2LO}{6LO} = \frac{1}{3} \Rightarrow QT = \frac{x}{6} \Rightarrow QR = \frac{x}{3}.$$

$$A_{MNPQRS} = \frac{1}{2}(QR + PS)TK + \frac{1}{2}(PS + MN)KL = \frac{7}{9}xy = \frac{14}{9}S \Rightarrow \frac{14}{9}S = 14 \Rightarrow S = 9cm^2.$$

$$Alat = 54cm^2.$$

$$12.3. M^2 = \begin{pmatrix} 2 - 2\cos \alpha & 2\sin \alpha \\ 2\sin \alpha & 2 + 2\cos \alpha \end{pmatrix} = 2M; M^3 = 2M^2 = 2^2 M.$$

Prin inducție, se demonstrează că $M^n = 2^{n-1}M$. Deci, $M^{2016} = 2^{2015}M$. Analog,

$$N^{2016} = 2^{2015}N. \text{ Rezultă că } A = 2^{2015}(M + N) = 2^{2015} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 \\ 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}. \text{ Astfel,}$$

$$\det A = 2^{4032}.$$

12.4. Fie $f: \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ - funcție continuă. Din teorema de medie rezultă că

$$\text{există } c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \text{ astfel încât } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx = f(c) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\cos c}{c} \cdot \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Pentru } c \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \text{ avem } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \cos c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{\pi} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{6}{\pi} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{\cos c}{c} \cdot \frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a XII-a, prima zi

BAREM DE CORECTARE

PROBLEMA 12.1.	Punctaj acordat
Aflarea primitivei $F(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2} + C$ sau a altei primitive	4 puncte
Cazul $C = 0$.	1 punct
Cazul $C \neq 0$ și obținerea $C \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \setminus \{0\}$	2 puncte
Total	7 puncte
PROBLEMA 12.2.	
Desenul corect	1 punct
Exprimarea lui MN prin latura bazei	1 punct
Exprimarea lui PS prin latura bazei	1 punct
Exprimarea lui QR prin latura bazei	1 punct
Exprimarea lui TK prin apotemă	1 punct
Exprimarea lui KL prin apotemă	1 punct
Dreterminarea ariei unei fete laterale si a ariei totale	1 punct
Total	7 puncte
PROBLEMA 12.3.	
$A = M^{2016} + N^{2016}, M^2 = 2M; N^2 = 2N$	2 puncte
Afirmarea $M^n = 2^{n-1}M, N^n = 2^{n-1}N$	1 punct
Demonstrarea prin inducția matematica că $M^n = 2^{n-1}M, N^n = 2^{n-1}N$	2 puncte
$A = 2^{2015} (M + N) = \begin{pmatrix} 2^{2016} & 0 \\ 0 & 2^{2016} \end{pmatrix}$.	1 punct
$\det A = 2^{4032}$	1 punct
Total	7 puncte
PROBLEMA 12.4.	
Aplicarea teoremei despre valoarea medie $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{x} dx = f(c) \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\cos c}{c} \cdot \frac{\pi}{6}, c \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right)$	3 puncte
$\frac{1}{2} \leq \cos c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	1 punct
$\frac{3}{\pi} \leq \frac{1}{c} \leq \frac{6}{\pi}$	1 punct
$\frac{1}{4} \leq \frac{\cos c}{c} \cdot \frac{\pi}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$	2 puncte
Total	7 puncte