

Clasa XII-a, Prima zi

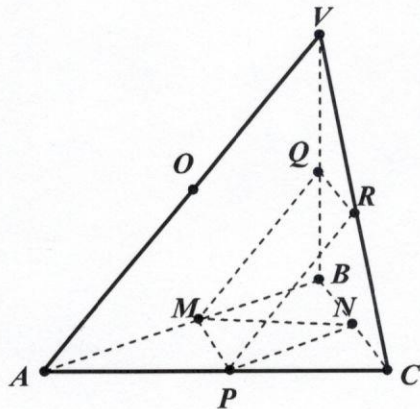
$$12.1. \quad u_k = \int_1^k \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\ln|x| - \ln|x+1| \right) \Big|_1^k = \ln k - \ln(k+1) + \ln 2.$$

$$v_n = (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \dots + (\ln n - \ln(n+1)) + (n-1) \ln 2 = n \ln 2 - \ln(n+1).$$

$$\lim_n \frac{v_n}{n} = \lim_n \left(\ln 2 - \frac{\ln(n+1)}{n} \right) = \ln 2 - 0 = \ln 2, \quad \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0 \right].$$

Răspuns: $\ln 2$.

12.2.



Notăm cu M, N, P, Q, R mijloacele laturilor AB, BC, AC, BV, CV , respectiv. Avem că $AMNP$ este romb inscriptibil $\Rightarrow AMNP$ este pătrat, iar $\triangle ABC$ este dreptunghic isoscel. Analog, $MQRP$ este paralelogram inscriptibil $\Rightarrow MQRP$ este dreptunghi.

$$\text{Avem } AV \parallel MQ, BC \parallel QR \Rightarrow AV \perp BC, BC \perp (ANV) \Rightarrow \begin{cases} VN \perp BC \\ AN \perp BC \end{cases}.$$

$$\text{Cum } m(\angle VAN) = m(\angle AVN) = 45^\circ \Rightarrow \triangle ANV \text{ este dreptunghic isoscel.}$$

$$\text{Obținem: } \triangle BAC \cong \triangle BVC \Rightarrow \triangle AVB, \triangle AVC - \text{echilaterale.}$$

$$\text{Fie } O \text{ mijlocul lui } AV \Rightarrow O \text{ este centrul sferei pe care se află punctele din enunțul problemei} \Rightarrow$$

$$AV = 2 \text{ cm} \Rightarrow A_{AVC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 = \sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

$$12.3. \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) = 2^{2015}.$$

$$\text{Cazul: } a - \text{impar, } b, c - \text{pare. Avem } \begin{cases} a+b+c - \text{impar} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc - \text{impar} \end{cases}. \text{ În acest caz nu avem soluții.}$$

$$\text{Cazul: } a, b - \text{impare, } c - \text{par. Avem } \begin{cases} a+b+c - \text{par} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc - \text{impar} \end{cases} \text{ și}$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0.$$

$$\text{Obținem: } \begin{cases} a+b+c = 2^{2015} \\ a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c = 2^{2015} \\ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 2 \end{cases}.$$

$$\text{Avem: } \begin{cases} a = b \\ (a - c)^2 = 1 \\ c + 2a = 2^{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a - c = 1 \\ c + 2a = 2^{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a = c + 1 \\ c = \frac{2^{2015} - 2}{3} \\ b = a = c - 1 \\ c = \frac{2^{2015} + 2}{3} \end{cases}$$

$$\text{Avem: } 2^{2015} + 2 = (3 - 1)^{2015} + 2 = M3 + 1; \quad 2^{2015} - 2 = M3 \Rightarrow \begin{cases} a = b = \frac{2^{2015} + 1}{3} \\ c = \frac{2^{2015} - 2}{3} \end{cases}$$

Analog se obțin și celelalte triplete.

Cazul: a, b, c — impare.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 2^{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ (a + b + c)^2 - 3(ab + ac + bc) = 2^{2015} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ -3(ab + ac + bc) = 2^{2015} - 1 = M3 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \text{. N-avem}$$

soluții.

Răspuns:

$$\left\{ \left(\frac{2^{2015} + 1}{3}, \frac{2^{2015} + 1}{3}, \frac{2^{2015} - 2}{3} \right), \left(\frac{2^{2015} + 1}{3}, \frac{2^{2015} - 2}{3}, \frac{2^{2015} + 1}{3} \right), \left(\frac{2^{2015} - 2}{3}, \frac{2^{2015} + 1}{3}, \frac{2^{2015} + 1}{3} \right) \right\}.$$

12.4.

Avem:

$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{\arcsin(\operatorname{tg} x)} dx = \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{\arcsin(\operatorname{tg} x)} \\ x = \arctg(\sin y^2) \\ y \in [0; \sqrt{\pi/2}] \end{array} \right| = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \cdot (\arctg(\sin y^2))' dy = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot (\arctg(\sin x^2))' dx.$$

$$I = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \left(x' \cdot \arctg(\sin x^2) + x \cdot (\arctg(\sin x^2))' \right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} (x \cdot \arctg(\sin x^2))' dx = x \cdot \arctg(\sin x^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} = \frac{\pi}{8} \sqrt{2\pi}.$$

Funcția $g: \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ $g(x) = \sqrt{\arcsin(\operatorname{tg} x)}$ este crescătoare și inversabilă.

BAREM DE CORECTARE
CLASA XII – PRIMA ZI
PROBLEMA 12.1

- $u_k = \ln k - \ln(k+1) + \ln 2$ 2 puncte
 $v_n = n \ln 2 - \ln(n+1)$ 3 puncte
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = \ln 2$ 2 puncte

PROBLEMA 12.2.

- Demonstrarea $BC \perp (ANV)$ 2 puncte
Deducerea că $m\angle(VA, (BAC)) = m(\angle VAN)$ și $m\angle(VA, (BVC)) = m(\angle AVN)$...1 punct
 $\triangle AVB, \triangle AVC$ - echilaterale 2 puncte
Argumentarea faptului că centrul sferei este mijlocul lui VA..... 1 punct
Calcularea $A_{AVC} = \sqrt{3} (cm^2)$ 1 punct

PROBLEMA 12.3

- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ 1 punct
Demonstrarea $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0$ 1 punct
Cazul: a – impar, b, c – pare1 punct
Cazul: a, b – impare, c – par2 puncte
Cazul: a, b, c – impare1 punct
Raspuns final1 punct

PROBLEMA 12.4

- Notăția $y = \sqrt{\arcsin(tgx)}$ 1 punct
Funcția $g: \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \left[0; \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$ $g(x) = \sqrt{\arcsin(tgx)}$ este inversabilă1 punct
Determinarea $x = \arctg(\sin y^2)$ 1 punct
 $\int_0^{\pi/4} \sqrt{\arcsin(tgx)} dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cdot (\arctg(\sin x^2))' dx$ 1 punct
Scrierea integralei inițiale sub forma $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} (x \cdot \arctg(\sin x^2))' dx$ 2 puncte
Calcularea integralei1 punct