

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a XI-a, ziua a doua

SOLUȚII

11.5. Fie șirul $(P_n(X))_{n=1}^{\infty}$, unde $P_n(X)$ este un polinom de grad n , astfel încât $P_n(n^k) = n^{-k}$, $k = \overline{0, n}$. Arătați că șirul $(P_n(0))_{n=1}^{\infty}$ este convergent și calculați limita lui. Poate fi $1/2$ termen al șirului $(P_n(0))_{n=1}^{\infty}$? Argumentați răspunsul.

Soluție. Fie $n \geq 2$. Considerăm polinomul $G_n(X) = XP_n(X) - 1$ de grad $n+1$. Avem $G_n(x) = 0$ pentru $\forall x \in \{n^0, n^1, \dots, n^n\}$. Deci, $G_n(X) = a \prod_{k=0}^n (X - n^k)$. Deoarece $P_n(0)$ este termenul liber al polinomului $P(X)$,

rezultă că $P_n(0)$ este coeficientul lui X în $G_n(X)$. Conform relațiilor lui Viète,

$$\begin{cases} S_n = \left(\prod_{k=0}^n n^k \right) \left(\frac{1}{n^0} + \frac{1}{n^1} + \dots + \frac{1}{n^n} \right) = (-1)^n \frac{P_n(0)}{a}, \\ S_{n+1} = \prod_{k=0}^n n^k = \frac{(-1)^n}{a} \end{cases}, \text{ de unde } P_n(0) = \frac{S_n}{S_{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}. \text{ Deci, } \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(0) = 1.$$

Valoarea $\frac{1}{2}$ poate fi termen al șirului doar dacă se consideră $P_1(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$.

11.6. Fie a , b și c lungimile laturilor triunghiului ABC , iar α , β și respectiv γ – măsurile unghiurilor opuse. Arătați că dacă $a + c = b \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$, atunci triunghiul este dreptunghic.

Soluție. Aplicând teorema sinusurilor, obținem $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului. Deci, avem relațiile $a = 2R \sin \alpha$, $b = 2R \sin \beta$ și $c = 2R \sin \gamma$, ceea ce implică

$$\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} = \frac{a+c}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}},$$

adică $\cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}$, de unde obținem $\alpha - \gamma = \pm \beta$, echivalent cu $\begin{cases} \beta + \gamma = \alpha \\ \alpha + \beta = \gamma \end{cases}$. Deoarece $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, avem

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ sau $\gamma = \frac{\pi}{2}$ și, deci, triunghiul este dreptunghic.

11.7. La un concurs de șah s-au înregistrat 60 de participanți, numerotați de la 1 la 60, ce trebuie să fie repartizați în 6 grupe de minim 3 membri fiecare. Fiecare participant j va juca o partidă cu fiecare coleg de grupă k , $k > j$, rezultatul partidei fiind învingere, înfrângere sau remiză. Repartizați participanții în grupe astfel încât numărul total de partide jucate să fie minim. Este posibil oare ca, oricum am alege 3 colegi de grupă, rezultatele partidelor jucate între ei să nu fie identice? Argumentați răspunsul.

Soluție. Fie $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$ numărul de participanți din fiecare grupă. Avem $\sum_{j=1}^6 k_j = 60$. Numărul de partide

jucate este $N = \sum_{j=1}^6 C_{k_j}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^6 k_j^2 - \sum_{j=1}^6 k_j \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 k_j^2 - 30$ și, conform inegalității mediilor, avem

$$N = 3 \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 k_j^2 \right) - 30 \geq 3 \left(\frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 k_j \right)^2 - 30 = 270 = 6C_{10}^2, \text{ minimul realizându-se pentru}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 10.$$

Vom reprezenta participanții prin puncte necoliniare în plan, partidele jucate – prin segmente ce unesc punctele corespunzătoare participanților, iar rezultatul unei partide – printr-o culoare atribuită unui segment. E necesar de arătat că putem colora toate segmentele în 3 culori astfel încât să nu existe un triunghi monocolor. Într-adevăr, vom diviza fiecare grupă de 10 puncte în două subgrupe de 5 puncte. Pentru comoditate, vom considera că fiecare subgrupă de 5 puncte formează un pentagon convex. Vom colora laturile cu prima culoare, diagonalele – cu a doua culoare și segmentele ce unesc punctele din subgrupe diferite – cu culoarea a treia. Se observă că astfel nu avem triunghiuri monocolor și, deci, e posibil ca, oricum am alege 3 colegi de grupă, rezultatele partidelor jucate între ei să nu fie identice.

11.8. Aflați toate funcțiile $f: R \rightarrow R$, unde $f(f(x) + y) - 2y = f(f(-y) - 2x) + 3x$, $\forall x, y \in R$.

Soluție. Fie $f: R \rightarrow R$, astfel încât $f(f(x) + y) - 2y = f(f(-y) - 2x) + 3x$, $\forall x, y \in \square$ **(1)**. Pentru $x = a$ și $y = b$ avem relația $f(f(a) + b) - 2b = f(f(-b) - 2a) + 3a$, $\forall a, b \in \square$ **(2)**. Pentru $x = -b$, $y = -2a$ obținem egalitatea $f(f(-b) - 2a) + 4a = f(f(2a) + 2b) - 3b$, $\forall a, b \in \square$ **(3)**. Din **(2)** și **(3)** avem $f(f(a) + b) + a + b = f(f(2a) + 2b)$, $\forall a, b \in \square$ **(4)**. Pentru $b = f(a) - f(2a)$, relația **(4)** devine $f(a) = f(2a) - a$, $\forall a \in \square$ **(5)**, iar pentru

$b = -f(a) + \frac{c}{2}$ formula **(4)** obține forma $f\left(\frac{c}{2}\right) + \frac{c}{2} + a - f(a) = f(f(2a) - 2f(a) + c)$, $\forall a, c \in \square$ **(6)**. Utilizând

relația **(5)** în **(6)**, se obține $f(c) + a - f(a) = f(c + a - f(a))$, $\forall a, c \in \square$ **(7)**. Pentru $c = f(-y) - 2x$ și $a = -y$, relația **(7)** devine

$f(f(-y) - 2x) = f(-y - 2x) + f(-y) + y$, $\forall x, y \in \square$ **(8)**, iar pentru $c = f(x) + y$ și $a = x$, relația **(7)** obține forma

$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(x) - x$, $\forall x, y \in \square$ **(9)**. Substituind **(8)** și **(9)** în **(1)**, obținem

$f(x + y) + f(x) = f(-y - 2x) + f(-y) + 3y + 4x$, $\forall x, y \in \square$. În particular, pentru $y = -x$ și $f(0) = d$, se obține $f(-x) = d - x$, $\forall x \in \square$, echivalent cu $f(x) = x + d$, $\forall x \in \square$ **(10)**. Deci, orice funcție ce verifică **(1)** e de forma **(10)**. De asemenea, pentru orice funcție de forma **(10)**, substituind în **(1)**, ușor se verifică faptul că se obține identitate. Deci, mulțimea funcțiilor ce verifică condiția **(1)** este $M = \{f(x) = x + d \mid \forall d \in \square\}$.

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a XI-a, ziua a doua

Barem de corectare

11.5.

Considerarea polinomul $G_n(X) = XP_n(X) - 1$ de grad $n+1$ 1p

Obținerea descompunerii $G_n(X) = a \prod_{k=0}^n (X - n^k)$ 1p

Scrierea relațiilor lui Viète.....2p

Obținerea termenului general pentru $\forall n \geq 2: P_n(0) = \frac{S_n}{S_{n+1}} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^k} = \frac{1 - \frac{1}{n^{n+1}}}{1 - \frac{1}{n}}$ 1p

Calcularea corectă a limitei.....1p

Obținerea faptului că $\frac{1}{2}$ poate fi termen al șirului doar dacă se consideră $P_1(X) = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ 1p

11.6.

Scrierea relațiilor ce rezultă din teorema sinusurilor.....1p

Obținerea egalității $(a+c)/b = (\sin \alpha + \sin \gamma)/\sin \beta$ 1p

Obținerea relației $(a+c)/b = \left(\sin \frac{\alpha+\gamma}{2} \cos \frac{\alpha-\gamma}{2} \right) / \left(\sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \right)$ 1p

Obținerea egalității $(a+c)/b = \left(\cos \frac{\alpha-\gamma}{2} \right) / \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)$ 1p

Obținerea ecuației $\cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{\alpha-\gamma}{2}$ 1p

Obținerea totalității $\begin{cases} \beta + \gamma = \alpha \\ \alpha + \beta = \gamma \end{cases}$ 1p

Obținerea faptului că triunghiul este dreptunghic.....1p

11.7.

Scrierea relației pentru numărul de participanți: $N = \sum_{j=1}^6 C_{k_j}^2$ 1p

Obținerea formulei $N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 k_j^2 - 30$ 1p

Obținerea inegalității $N \geq 270 = 6C_{10}^2$ 1p

Obținerea repartizării optime: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 10$1p

Reducerea problemei la o problemă de colorare.....1p

Împărțirea grupelor în subgrupe.....1p

Colorarea segmentelor în trei culori.....1p

11.8.

Obținerea relației $f(f(a)+b) + a + b = f(f(2a)+2b)$, $\forall a, b \in \square$ 2p

Obținerea relației $f(c) + a - f(a) = f(c + a - f(a))$, $\forall a, c \in \square$ 2p

Obținerea relației $f(x) = x + d$, $\forall x \in \square$ 2p

Demonstrarea reciprocei prin verificarea soluției.....1p