

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a XI-a, ziua a doua

SOLUȚII

11.5. Fie M mulțimea numerelor naturale $n \geq 2$ pentru care există n numere naturale impare a căror sumă și produs coincid. Dacă $n \in M$, atunci există numerele naturale impare $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel încât $a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 a_2 \dots a_n$. Fie $a_j = 2k_j + 1$, $j = \overline{1, n}$. Avem

$$a_1 a_2 \dots a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = (2k_1 + 1) + (2k_2 + 1) + \dots + (2k_n + 1) = 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n) + n,$$

de unde se obține

$$\begin{aligned} n &= a_1 a_2 \dots a_n - 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_n + 1) - 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = \\ &= 4r + 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n) + 1 - 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n) = 4r + 1, \end{aligned}$$

unde $r \in \mathbb{N}^*$. Deoarece $n \geq 2$, rezultă că $n \neq 1$, adică $r \neq 0$, ceea ce implică $M \subseteq \{4r + 1 | r \in \mathbb{N}^*\}$. Deoarece

$$6r + 3 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{4r-1} + 3 + (2r + 1) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{4r-1} \cdot 3 \cdot (2r + 1),$$

$\forall r \in \mathbb{N}^*$, avem $\{4r + 1 | r \in \mathbb{N}^*\} \subseteq M$. Deci, $M = \{4r + 1 | r \in \mathbb{N}^*\}$.

11.6. Se observă că $b_n = b_{n-1} + \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}$, $\forall n \geq 2$. Deoarece $(a_n)_{n=1}^\infty$ e o progresie aritmetică cu primul termen

$a_1 = 1$ și rația $r > 0$, rezultă că $a_{n+1} = 1 + nr$, $n = \overline{0, \infty}$. Pentru $n = 1$ avem

$$b_1 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1 + r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1 + r)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r a_1 a_2}. \text{ Presupunem că } b_k = \frac{1}{r} - \frac{1}{r a_1 a_2 \dots a_{k+1}}, k = \overline{1, n-1}, n \geq 2. \text{ Avem}$$

$$b_n = b_{n-1} + \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r a_1 a_2 \dots a_n} + \frac{n}{r a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{nr - a_{n+1}}{r a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r a_1 a_2 \dots a_{n+1}}.$$

Se observă că $c_n = \overset{\text{def}}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = (1 + r)(1 + 2r) \dots (1 + nr) > 1$, $n = \overline{1, \infty}$. Deoarece $(c_n)_{n=1}^\infty$ este monoton strict crescător, rezultă că $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$, unde $1 < L \leq +\infty$. Deoarece $\frac{c_n}{c_{n-1}} = 1 + nr \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), rezultă că

$$L = L \cdot (+\infty), \text{ adică } L = +\infty. \text{ Deci, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{r} - 0 = \frac{1}{r}.$$

11.7. Fie O mijlocul diagonalei AC . Deoarece $|AO| = |OC|$ și DD' este înălțime în triunghiurile AOD și COD , rezultă că $S_{AOD} = S_{COD}$ (1).

Similar, deoarece $|AO| = |OC|$ și BB' este înălțime în triunghiurile AOB și COB , rezultă că $S_{AOB} = S_{COB}$ (2). Din (1) și (2) avem

$$S_{OBAD} = S_{AOD} + S_{AOB} = S_{COD} + S_{COB} = S_{OB CD} \quad (3)$$

Deci, punctul O aparține locului geometric căutat.

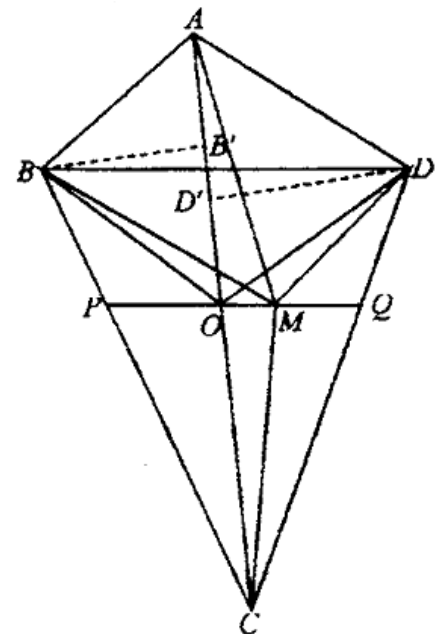
Ducem prin punctul O o paralelă la dreapta BD , intersectând frontiera patrulaterului convex în punctele P și Q . Vom demonstra că locul geometric căutat este segmentul $[PQ]$.

Fie $M \in [PQ]$. Să demonstrăm că $S_{MB CD} = S_{MB AD}$. Deoarece $MO \parallel BD$, avem $d(M, BD) = d(O, BD)$. Considerăm două cazuri:

Cazul I.

Punctele A și O sunt în semiplane diferite determinate de dreapta BD (sau punctul O se află pe BD)

Se obține $S_{MB AD} = S_{ABD} + S_{BDM} = S_{ABD} + S_{BOD} = S_{OB AD}$,



Barem de corectare

11.5.

- 1) (1p) $a_j = 2k_j + 1, j = \overline{1, n}$.
- 2) (1p) $n = (2k_1 + 1)(2k_2 + 1) \dots (2k_n + 1) - 2(k_1 + k_2 + \dots + k_n)$.
- 3) (1p) $n = 4r + 1$, unde $r \in \mathbb{N}$.
- 4) (1p) $M \subseteq \{4r + 1 | r \in \mathbb{N}^*\}$.
- 5) (2p) $6r + 3 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{4r-1} + 3 + (2r + 1) = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{4r-1} \cdot 3 \cdot (2r + 1), \forall r \in \mathbb{N}^*$
- 6) (1p) $M = \{4r + 1 | r \in \mathbb{N}^*\}$.

11.6.

- 1) (1p) $b_n = b_{n-1} + \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}}, \forall n \geq 2$.
- 2) (1p) $a_{n+1} = 1 + nr, n = \overline{0, \infty}$.
- 3) (1p) $b_1 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r(1+r)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{ra_1 a_2}$.
- 4) (1p) Presupunere $b_k = \frac{1}{r} - \frac{1}{ra_1 a_2 \dots a_{k+1}}, k = \overline{1, n-1}, n \geq 2$.
- 5) (1p) $b_n = b_{n-1} + \frac{n}{a_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{ra_1 a_2 \dots a_n} + \frac{n}{ra_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} + \frac{nr - a_{n+1}}{ra_1 a_2 \dots a_{n+1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{ra_1 a_2 \dots a_{n+1}}$.
- 6) (1p) $c_n \stackrel{def}{=} a_1 a_2 \dots a_{n+1} \rightarrow +\infty, n \rightarrow +\infty$.
- 7) (1p) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{r} - 0 = \frac{1}{r}$.

11.7.

- 1) (1p) Obținerea relațiilor (1) și (2).
- 2) (1p) Obținerea faptului că punctul O aparține locului geometric;
- 3) (1p) Intuirea locului geometric;
- 4) (2p) Demonstrarea că pentru $\forall M \in [PQ]$ este justă egalitatea $S_{MBAD} = S_{MBCD}$ (câte 1p pentru fiecare caz);
- 5) (1p) Demonstrarea că dacă $S_{MBAD} = S_{MBCD}$, atunci $d(M, BD) = d(O, BD)$
- 6) (1p) Demonstrarea că dacă $S_{MBAD} = S_{MBCD}$, atunci $M \in [PQ]$.

11.8.

- 2) (1p) Colorarea în două culori. Deducerea faptului că după amplasarea a câte un pătrățel unitar în fiecare linie și coloană numărul de celule albe și negre rămase trebuie să fie egale între ele.
- 3) (1p) Cazurile particulare $n = 4$ și $n = 5$. Acoperirea dreptunghiurilor complete cu o latură pară.
- 4) (1p) Cazul $n = 4k$.
- 5) (1p) Cazul $n = 4k + 1$.
- 6) (1p) Compararea numerelor totale de celule albe și negre. Studiarea parității numerelor de pătrățele albe și negre.
- 7) (1p) Cazul $n = 4k + 2$.
- 8) (1p) Cazul $n = 4k + 3$.