

A 59-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a XI-a, prima zi

Soluții

11.1. Efectuând substituția $x = t + 1$, obținem:

$$f(t) = -4(t+1)^3 + 12(t+1)^2 - 9(t+1) + 1 = -4t^3 + 3t, \quad f(\sin x) = -4\sin^3 x + 3\sin x = \sin 3x.$$

$$g_k(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k \text{ ori}} \right)(\sin x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} \right)(\sin 3x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k-2 \text{ ori}} \right)(\sin 3^2 x) = \dots = \sin(3^k x)$$

Atunci limita se va putea calcula astfel:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_k(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3^k x)}{x} = 3^k.$$

Răspuns: 3^k .

11.2. Vom arăta mai întâi că $e^{t-2} \geq \frac{t^2}{4}$, $(\forall) t \in [0, +\infty)$ (1).

Pentru $t = 0 \Rightarrow e^{-2} \geq 0$ adevărată.

Pentru $t > 0$ inegalitatea este echivalentă cu $t - 2 \geq \ln \frac{t^2}{4}$ sau $t - 2 - 2 \ln t + 2 \ln 2 \geq 0$, $(\forall) t > 0$.

Fie $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t - 2 - 2 \ln t + 2 \ln 2$, $f'(t) = 1 - \frac{2}{t} = \frac{t-2}{t}$, $f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$,
 $f(2) = 0$.

t	0	2	$+\infty$
$f'(t)$	-----	0	+++++
$f(t)$	$\searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow \searrow$	0	$\nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow \nearrow$

Din tabel avem că $f(t) \geq 0$, $(\forall) t > 0$.

Din $x, y \in [0, +\infty) \Rightarrow x + y \in [0, +\infty)$ și aplicînd (1) avem $e^{x+y-2} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$ cu egalitate pentru $x + y = 2$. În continuare $\frac{(x+y)^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2}{4}$ cu egalitate pentru $xy = 0$, deci $e^{x+y-2} \geq \frac{x^2+y^2}{4}$, $(\forall) x, y \in [0, +\infty)$ iar egalitate se obține pentru $x = 2, y = 0$ sau $x = 0, y = 2$.

11.3. Notînd $|z_1| = r$, avem $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0$, deci $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \frac{\overline{z_1}}{r^2} + \frac{\overline{z_2}}{r^2} + \frac{\overline{z_3}}{r^2} + \frac{\overline{z_4}}{r^2} = 0$.

Rezultă $\frac{z_1+z_2}{z_1z_2} + \frac{z_3+z_4}{z_3z_4} = 0 \Leftrightarrow \frac{z_1+z_2}{z_1z_2} - \frac{z_1+z_2}{z_3z_4} = 0$, de unde $(z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1z_2} - \frac{1}{z_3z_4} \right) = 0$.

Dacă $z_1 + z_2 = 0$ atunci $z_3 + z_4 = 0$ și concluzia rezultă imediat.

Dacă $\frac{1}{z_1z_2} - \frac{1}{z_3z_4} = 0$, atunci $z_1z_2 = z_3z_4$. Analizăm expresia $(z_1 + z_3)(z_1 + z_4) = z_1^2 + z_1z_4 + z_3z_1 + z_3z_4 = z_1^2 + z_1z_4 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1(z_1 + z_2 + z_3 + z_4) = 0$, rezultă că $z_1 + z_3 = 0$ sau $z_1 + z_4 = 0$.

Dacă $z_1 + z_3 = 0$ atunci $z_2 + z_4 = 0$ și concluzia rezultă imediat.

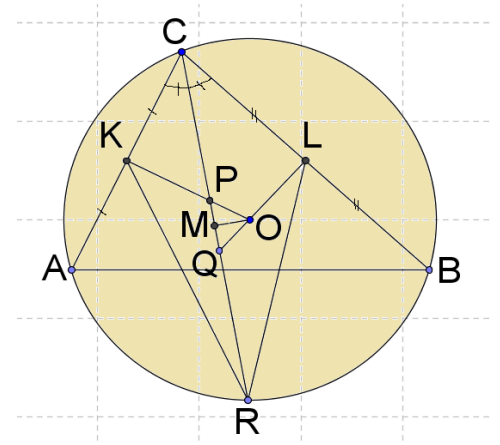
Dacă $z_1 + z_4 = 0$ atunci $z_2 + z_3 = 0$ și $\frac{1}{z_1^n} + \frac{1}{z_2^n} + \frac{1}{z_3^n} + \frac{1}{z_4^n} = 0$, pentru orice număr natural impar n .

11.4. Dacă $P = Q$, atunci P este punctul de intersecție al mediatoarelor segmentelor AC și BC . Din aceste considerente CR este mediatoarea segmentului AB . Simetria în raport cu dreapta CR implică $\mathcal{A}(\triangle PRK) = \mathcal{A}(\triangle QRL)$.

Fie $P \neq Q$. Dreptele PK și LQ se intersectează în punctul O centrul cercului circumscris triunghiului ABC (vezi figura alăturată). Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice CLQ și CKP

avem $PK \cdot CQ = QL \cdot CP$ și $\angle CQL \equiv \angle CPK$. În continuare, triunghiul OPQ este isoscel cu baza $[PQ]$, iar punctele P și Q sunt simetrice în raport cu punctul M – piciorul perpendicularei din O la CR . Punctul M este mijlocul segmentului CR , de aceea $CP = QR$ și $CQ = PR$. Raportul ariilor triunghiurilor din enunț este egal cu:

$$\frac{\mathcal{A}(\triangle PRK)}{\mathcal{A}(\triangle QRL)} = \frac{PK \cdot PR \cdot \sin(\angle RPK)}{QL \cdot QR \cdot \sin(\angle RQL)} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin(\angle CPK)}{QL \cdot CP \cdot \sin(\angle CQL)} = 1.$$



BAREM DE CORECTARE

Problema 11.1.

- A indicat substituția $x = t + 1$ 1p
- A obținut $f(t) = 3t - 4t^3$ 1p
- A scris argumentat $f(\sin x) = \sin 3x$ 1p
- A obținut $g_k(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k-1 \text{ ori}} \right) (\sin 3x)$ 1p
- A obținut $g_k(x) = \left(\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{de } k-2 \text{ ori}} \right) (\sin 3^2 x)$ 1p
- A dedus că $g_k(x) = \sin(3^k x)$ 1p
- A calculat corect limita1p

Problema 11.2.

- A indicat inegalitatea $e^{t-2} \geq \frac{t^2}{4}, (\forall) t \in [0, +\infty)$ 1p
- A verificat că inegalitatea este adevărată pentru $t = 0$ 1p
- A definit funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t - 2 - 2 \ln t + 2 \ln 2$ 1p
- A demonstrat că $f(t) \geq 0, (\forall) t > 0$ cu egalitate pentru $t = 2$ 1p
- A obținut argumentat că $e^{x+y-2} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$ cu egalitate pentru $x + y = 2$ 1p
- A indicat că $\frac{(x+y)^2}{4} \geq \frac{x^2+y^2}{4}$ cu egalitate pentru $xy = 0$ 1p
- A obținut condițiile de egalitate $x = 2, y = 0$ sau $x = 0, y = 2$ 1p

Problema 11.3.

- A arătat că $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} + \overline{z_4} = 0$ 1p
- A obținut argumentat că $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = 0$ 1p
- A scris argumentat $(z_1 + z_2) \left(\frac{1}{z_1 z_2} - \frac{1}{z_3 z_4} \right) = 0$ 1p
- A obținut demonstrația pentru $z_1 + z_2 = 0$ 1p
- În cazul $z_1 z_2 = z_3 z_4$, a obținut $z_1 + z_3 = 0$ sau $z_1 + z_4 = 0$ 1p
- A finisat demonstrația pentru $z_1 + z_3 = 0$ 1p
- A finisat demonstrația pentru $z_1 + z_4 = 0$ 1p

Problema 11.4.

- A demonstrat egalitatea ariilor triunghiurilor menționate în cazul $P = Q$ 1p
- Pentru $P \neq Q$, a prezentat un desen adecvat condițiilor din enunț1p
- A demonstrat asemănarea triunghiurilor dreptunghice CLQ și CKP 1p
- Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice a dedus: 1) $PK \cdot CQ = QL \cdot CP$ 1p
- 2) $\angle CQL \equiv \angle CPK$ 1p
- A demonstrat că $CP = QR$ și $CQ = PR$ 1p
- A demonstrat egalitatea ariilor triunghiurilor RPK și RQL 1p