

A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a X-a, ziua a II-a

SOLUȚII

10.5. Notăm $f^{2016} = f \circ f \circ \dots \circ f$. Atunci relația din enunț se mai scrie $f^{2016}(x) = ax - (a - 1)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ (1). Efectuând substituția $x \rightarrow f(x)$ obținem $f^{2016}(f(x)) = af(x) - (a - 1)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ sau $f^{2017}(x) = af(x) - (a - 1)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ (2). Aplicând funcția f ambilor termeni din (1), obținem $f(f^{2016}(x)) = f(ax - (a - 1))$ sau $f^{2017}(x) = f(ax - (a - 1))$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ (3). Din (2) și (3) rezultă că $af(x) - (a - 1) = f(ax - (a - 1))$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$ (4).

Dacă în (4) facem $x = 1$, obținem $af(1) - (a - 1) = f(a - (a - 1))$ sau $f(1) = 1$.

**** Există funcții liniare care posedă proprietatea indicată în enunț.**

10.6. Dacă $a = 0$, atunci ecuația din enunț are soluția $x = 0$.

Dacă $a < 0$, atunci pentru $a + x \geq 0$ avem $a - \sqrt{a + x} < 0$ și $\sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ n-are sens.

Fie $a > 0$. Expresia $\sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ are sens pentru $x \geq -a$ și $x \leq a^2 - a$.

Deoarece $x = \sqrt{a - \sqrt{a + x}}$ rezultă că $x \geq 0$. Luând în considerație condițiile $x \geq 0$, $x \leq a^2 - a$, $a > 0$ se obține $a \in [1, +\infty)$.

Rezolvăm ecuația din enunț pentru $a \in [1, +\infty)$, $x \geq 0$ $x \leq a^2 - a$:

Ridicând la pătrat ambii membri ai ecuației $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$ se obține $a - \sqrt{a + x} = x^2$ sau $\sqrt{a + x} = a - x^2$. Pentru membrul drept se impune condiția $a - x^2 \geq 0$ de unde rezultă că $0 \leq x \leq \sqrt{a}$.

În continuare din $\sqrt{a + x} = a - x^2$ prin ridicare la pătrat se obține $a + x = a^2 - 2ax^2 + x^4$ care se mai scrie $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0$. Rezolvăm ultima ecuație, considerând a necunoscută. Se obține

$a = x^2 - x$ sau $a = x^2 + x + 1$. Ecuația $x^2 - x - a = 0$, pentru $a \in [1, +\infty)$, are soluțiile $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}$

și $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$. Nici una dintre ele nu este soluție a ecuației inițiale deoarece $x_1 < 0$, iar x_2 nu satisface condiția $x \leq \sqrt{a}$.

Ecuația $x^2 + x + 1 - a = 0$, pentru $a \in [1, +\infty)$, are soluțiile $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$ și $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$.

Prima este negativă, iar a doua este soluție a ecuației inițiale. Confirmarea pentru x_2 :

$\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{4a - 3} \leq 2\sqrt{a} + 1 \Leftrightarrow 4a - 3 \leq 4a + 4\sqrt{a} + 1 \Leftrightarrow -3 \leq 4\sqrt{a} + 1$ (inegalitate adevărată).

$\frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \leq a^2 - a \Leftrightarrow -1 + \sqrt{4a - 3} \leq 2a^2 - 2a \Leftrightarrow \sqrt{4a - 3} \leq 2a^2 - 2a + 1 \Leftrightarrow$

$\sqrt{4a - 3} \leq 2a(a - 1) + 1 \Leftrightarrow 4a - 3 \leq 4a^2(a - 1)^2 + 4a(a - 1) + 1 \Leftrightarrow (a^2 + 1)(a - 1)^2 \geq 0$ (inegalitate adevărată).

Răspuns: $S = \emptyset$, pentru $a \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$;

$S = \{0\}$, pentru $a = 0$;

$S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \right\}$, pentru $a \in [1, +\infty)$.

10.7. Analizăm expresia $\log_{ab^5c^5} a$. Trecînd la baza 10, se obține: $\log_{ab^5c^5} a = \frac{lga}{lga+5(lgb+lgc)}$. Analog

pentru celelalte două expresii: $\log_{bc^5a^5} b = \frac{lgb}{lgb+5(lgc+lga)}$ și $\log_{ca^5b^5} c = \frac{lgc}{lgc+5(lga+lgb)}$.

Notăm $lga = x$, $lgb = y$, $lgc = z$, atunci $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Inegalitatea din enunț devine:

$$\frac{x}{x+5(y+z)} + \frac{y}{y+5(z+x)} + \frac{z}{z+5(x+y)} \geq \frac{3}{11}$$

Fie $s = \frac{x}{x+5(y+z)} + \frac{y}{y+5(z+x)} + \frac{z}{z+5(x+y)} = \sum \frac{x}{x+5(y+z)}$ sau $s = \sum \frac{x}{x+5(y+z)}$. Atunci $4s = \sum \frac{4x}{x+5(y+z)}$

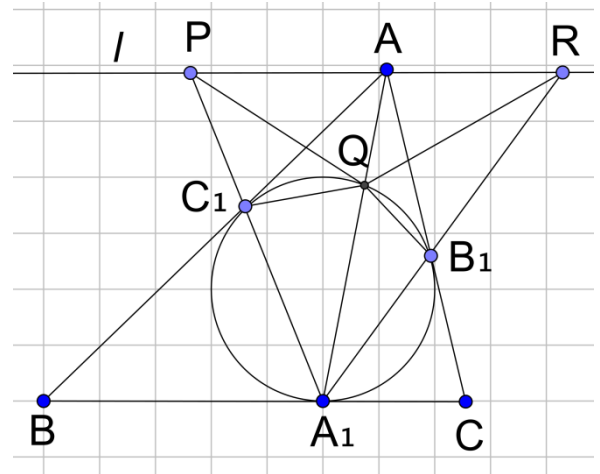
$\Leftrightarrow 4s + 3 = \sum \frac{4x}{x+5(y+z)} + 3 \Leftrightarrow 4s + 3 = \sum \left(\frac{4x}{x+5(y+z)} + 1 \right)$. În continuare:

$$\sum \left(\frac{4x}{x+5(y+z)} + 1 \right) = \sum \frac{5(x+y+z)}{x+5(y+z)} = 5(x+y+z) \sum \frac{1}{x+5(y+z)} = \frac{5}{11} \cdot 11 \cdot (x+y+z) \sum \frac{1}{x+5(y+z)} =$$

$$\frac{5}{11} \cdot \sum (x+5(y+z)) \sum \frac{1}{x+5(y+z)} \geq \frac{5}{11} \cdot 9 = \frac{45}{11}.$$

$$\text{Deci } 4s + 3 \geq \frac{45}{11} \Leftrightarrow 4s \geq \frac{12}{11} \Leftrightarrow s \geq \frac{3}{11}.$$

10.8. Deoarece dreapta BC este tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC , atunci $m(\angle BA_1Q) = \frac{1}{2}m(\widehat{A_1C_1Q}) = m(\angle A_1B_1Q)$. În continuare $\angle BA_1A \equiv \angle A_1AR$, fiind unghiuri alterne interne. Din aceste considerente $\angle QAR \equiv \angle A_1B_1Q$ și patrulaterul ARB_1Q este inscriptibil. Analog se arată că patrulaterul $PAQC_1$ este inscriptibil. Deci $m(\angle PQR) = m(\angle PQA) + m(\angle RQA) = m(\angle PC_1A) + m(\angle RB_1A) = m(\angle A_1C_1B) + m(\angle A_1B_1C)$. Unghiurile A_1C_1B și A_1B_1C sînt unghiuri dintre tangente și coarde. Deci $m(\angle PQR) = \frac{1}{2}(m(\widehat{A_1C_1}) + m(\widehat{A_1B_1})) = m(\angle B_1QC_1)$.



A 60-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 26 – 29 februarie 2016

Clasa a X-a, ziua a II-a

Barem de corectare

Subiectul 10. 5.

A efectuat substituția $x \rightarrow f(x)$ și a obținut $f^{2017}(x) = af(x) - (a - 1), (\forall)x \in \mathbb{R}$ 2p

A aplicat f ambilor termeni ai egalității din enunț și a obținut

$f^{2017}(x) = f(ax - (a - 1)), (\forall)x \in \mathbb{R}$2p

A scris egalitatea $af(x) - (a - 1) = f(ax - (a - 1)), (\forall)x \in \mathbb{R}$1p

A înlocuit în ultima egalitate $x = 1$ și a obținut $af(1) - (a - 1) = f(1)$1p

A finisat corect.....1p

Subiectul 10. 6.

A analizat cazurile $a = 0$ și $a < 0$ și a obținut $S = \{0\}$ corespunzător $S = \emptyset$ 1p

A obținut argumentat $x \geq 0$ și $a \in [1, +\infty)$ 1p

A obținut ecuația $a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0, a \in [1, +\infty), x \geq 0, x \leq \sqrt{a}, x \leq a^2 - a$ 1p

A rezolvat ecuațiile $x^2 - x - a = 0, x^2 + x + 1 - a = 0$ și a obținut soluțiile

$x_1 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$ și $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ corespunzător $x_1 = \frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ și $x_2 = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ 1p

A selectat soluțiile ecuației inițiale (câte un punct pentru fiecare ecuație

$x^2 - x - a = 0, x^2 + x + 1 - a = 0$)2p

A scris corect răspunsul1p

Subiectul 10. 7.

A scris fiecare logaritm în altă bază, de exemplu 101p

A obținut inegalitatea $\sum \frac{x}{x+5(y+z)} \geq \frac{3}{11}$, unde $lga = x, lgb = y, lgc = z$ și $x > 0$,

$y > 0, z > 0$1p

A notat $s = \sum \frac{x}{x+5(y+z)}$ și a scris expresia pentru $4s$ 1p

A scris expresia pentru $4s + 3$ 1p

A obținut $\sum \left(\frac{4x}{x+5(y+z)} + 1 \right) = \frac{5}{11} \cdot 11 \cdot (x + y + z) \sum \frac{1}{x+5(y+z)}$ 1p

A indicat $4s + 3 = \frac{5}{11} \cdot \sum (x + 5(y + z)) \sum \frac{1}{x+5(y+z)}$ 1p

A finalizat corect1p

Subiectul 10. 8.

A indicat argumentat $m(\angle BA_1Q) = m(\angle A_1B_1Q)$ 1p

A menționat $\angle BA_1A \equiv \angle A_1AR$ 1p

A argumentat că patrulaterul ARB_1Q este inscriptibil1p

A menționat că patrulaterul $PAQC_1$ este inscriptibil1p

A obținut argumentat $m(\angle PQR) = m(\angle PC_1A) + m(\angle RB_1A)$ 1p

A indicat $m(\angle PQR) = m(\angle A_1C_1B) + m(\angle A_1B_1C)$ 1p

A finalizat corect1p