

# A 59-a OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ DE MATEMATICĂ

Chişinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a X-a, ziua a doua

## SOLUȚII

### Problema 10. 5:

Din  $\sqrt[3]{x} < n \Rightarrow x < n^3$ . Atunci  $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x}} < n \Rightarrow x + \sqrt[3]{x} < n^3$ . Notăm  $n^3 - x = m$ ,  $m \in N^k \Rightarrow x = n^3 - m$  și  $n^3 - m + \sqrt[3]{n^3 - m} < n^3 \Rightarrow \sqrt[3]{n^3 - m} < m \Rightarrow n^3 - m < m^3 \Rightarrow n^3 < m^3 + m$ . Avem  $m \geq n$ . În caz contrar, din  $m \leq n-1 \Rightarrow n^3 < (n-1)^3 + (n-1) \Rightarrow n^3 < n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n - 1 \Rightarrow 3n^2 - 4n + 2 < 0$ , ceea ce este imposibil pentru  $n \in N^k$ . Deci,  $m \geq n$  și din  $x = n^3 - m \Rightarrow x \leq n^3 - n$ . Atunci  $\sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \dots + \sqrt[3]{x}}} \leq \sqrt[3]{n^3 - n + \sqrt[3]{n^3 - n + \dots + \sqrt[3]{n^3 - n}}} < \sqrt[3]{n^3 - n + \sqrt[3]{n^3 - n + \dots + \sqrt[3]{n^3 - n}}} = n$ . Deci  $x \in \{0, 1, 2, \dots, n^3 - n\}$ ,  $(\forall) n \in N, n \geq 2$ .

**Răspuns:**  $x \in \{0, 1, 2, \dots, n^3 - n\}$ ,  $(\forall) n \in N, n \geq 2$ .

### Problema 10. 6:

Fie  $a_n$  numărul numerelor naturale de  $n$  cifre cu proprietatea din enunț și  $M_n$  este mulțimea numerelor  $a_n$ . Trebuie să găsim  $\text{Card } M_{10} = a_{10}$ . Fie  $n \geq 4$ . Atunci în mulțimea  $M_n$  există  $a_{n-1}$  numere cu prima cifră 2,  $a_{n-2}$  numere cu primele două cifre 12 și  $a_{n-3}$  numere cu primele trei cifre 112. Deci,  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$  (1)  
Cum  $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 7$ , atunci  $a_4 = 13, a_5 = 24, a_6 = 44, a_7 = 81, a_8 = 149, a_9 = 274, a_{10} = 504$ .

**Răspuns:** 504.

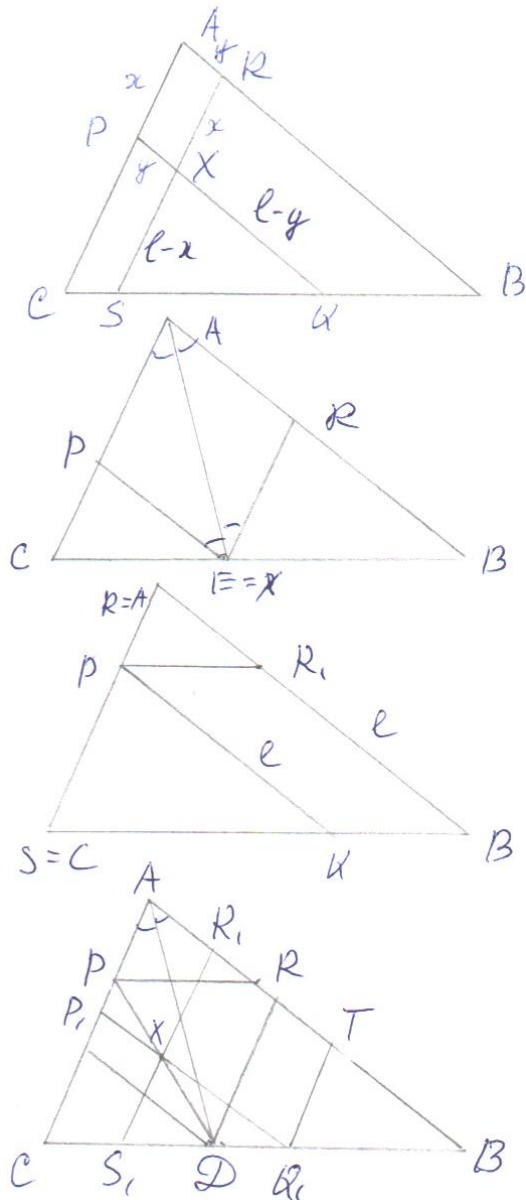
### Problema 10. 7:

Avem  $\min(a; b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ . Atunci  $\sum_{k=1}^{n-1} \min(x_k; x_{k+1}) = 2 \cdot \sum_{k=2}^{n-1} x_k + (x_1 + x_n) - (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n|) = x_1 + x_n - |x_1 - x_n|$ .

Rezultă că  $2 \sum_{k=2}^{n-1} x_k = (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n|) - |x_1 - x_n| \geq 0$ , deoarece dacă

$a_1 = x_1 - x_2, a_2 = x_1 - x_3, \dots, a_{n-1} = x_{n-1} - x_n$  cu  $a_1 = x_1 - x_2, a_2 = x_1 - x_3, \dots, a_{n-1} = x_{n-1} - x_n$  atunci din inegalitatea  $|a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{n-1}| \Rightarrow$   
 $\Rightarrow |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{n-1} - x_n| \geq |x_1 - x_n|$ .

**Problema 10. 8:**



Fie  $RS = PQ = l$ . Notăm

$$AP = RX = x, PX = AR = y, PQ \cap RS = \{X\}.$$

$$0 < x \leq l, 0 \leq y \leq l$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PQC \Rightarrow \frac{b}{b-x} = \frac{c}{l} \Rightarrow$$

$$x = b \left( 1 - \frac{l}{c} \right) \quad (1)$$

$$\triangle ABC \sim \triangle RBC \Rightarrow \frac{c}{c-y} = \frac{l}{b} \Rightarrow$$

$$y = c \left( 1 - \frac{l}{b} \right) \quad (2)$$

1) Dacă  $x = y = l$ ,  $l = \frac{bc}{b+c} \Rightarrow x \in (BC)$  și

$ARXP$  - romb.

$$\frac{BX}{XC} = \frac{l}{c-l} = \frac{BC}{P+C} : \frac{c^2}{B+C} = \frac{b}{c} \Rightarrow$$

$X$  - piciorul bisectoarei duse din  $A$ .

Fie  $X = E$  - piciorul bisectoarei duse din

$A \Rightarrow E \in$  locului geometric.

2)  $y = 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $AC = RS = l$ ,  $PR_1 \parallel BC$ ,  $BR_1 = l = b$

$$x = AP = b - \frac{b^2}{c} \Rightarrow \frac{PA}{AC} = \frac{AR_1}{AB} \Leftrightarrow 1 - \frac{b}{c} = 1 - \frac{b}{c}$$

$\Rightarrow P \in$  locului geometric.

3) Vom arăta că segmentul  $[PD]$  este locului geometric căutat. Fie

$X \in (PD)$ ,  $R_1S_1 = l$ ,  $BR = b$ ,  $RP \parallel BC$

$D \in (BC)$ ,  $m(\angle CAD) = m(\angle BAD)$ ,  $P_1Q_1 \cap R_1S_1 = \{X\}$

$R_1S_1 \parallel AC$ ,  $P_1Q_1 \parallel AB$ .

Ducem  $TQ_1 \parallel AC$ .

$$x = AP_1 = TQ_1 = b \left( 1 - \frac{l}{c} \right), TA = P_1Q_1. \text{ Din}$$

$$\triangle BTQ_1 \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{TQ_1}{AC} = \frac{BT}{AB} = \frac{c - P_1Q_1}{c}. \text{ Deci}$$

$$1 - \frac{l}{c} = \frac{c - P_1Q_1}{c} = 1 - \frac{P_1Q_1}{c} \Rightarrow P_1Q_1 = l$$

## **Barem de corectare**

### **Problema 10. 5:**

- |                                                                              |                 |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1) Stabilește $x < n^3$ , $x, n \in N$ , $n \geq 2$                          | 1 punct         |
| 2) Stabilește $n^3 < m^3 + m$ , $x = n^3 - m$                                | 2 puncte        |
| 3) Demonstrează că $m \geq n$ , $n \in N^n$ , $n \geq 2$                     | 2 puncte        |
| 4) Arată că $x \leq n^3 - n$ , $x \in N$                                     | 1 punct         |
| 5) Arată că numerele $x$ cu $x \leq n^3 - n$ satisfac inegalitatea din enunț | 1 punct         |
| <b>Total</b>                                                                 | <b>7 puncte</b> |

### **Problema 10. 6:**

- |                                                                               |                 |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1) Calculează $a_1 = 2$ , $a_2 = 4$ , $a_3 = 7 \dots$                         | 1 punct         |
| 2) Există $a_{n-1}$ numere cu proprietatea din enunț și prima cifră = 2       | 1 punct         |
| 3) Există $a_{n-2}$ numere cu proprietatea din enunț și primele 2 cifre = 12  | 1 punct         |
| 4) Există $a_{n-3}$ numere cu proprietatea din enunț și primele 3 cifre = 112 | 1 punct         |
| 5) Stabilește relația $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$                     | 2 puncte        |
| 6) Găsește corect $a_{10} = 504$                                              | 1 punct         |
| <b>Total</b>                                                                  | <b>7 puncte</b> |

### **Problema 10. 7**

- |                                                                                                |                 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1) Scrie $\min(a; b) = \frac{1}{2}(a + b -  a - b )$                                           | 1 punct         |
| 2) Desfășurarea egalității din enunț                                                           |                 |
| a) partea stângă                                                                               | 1 punct         |
| b) partea dreaptă                                                                              | 1 punct         |
| 3) Obține egalitatea $2 \sum_{k=2}^{n-1} x_k = \sum_{k=1}^{n-1}  x_k - x_{k+1}  -  x_1 - x_n $ | 1 punct         |
| 4) Arată $\sum_{k=2}^{n-1} x_k \geq 0$                                                         | 3 puncte        |
| <b>Total:</b>                                                                                  | <b>7 puncte</b> |

### **Problema 10. 8**

- |                                                                                                                                      |                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1) Găsește relația pentru $x$ :                                                                                                      | 1 punct         |
| $x = b \left( 1 - \frac{l}{c} \right), \text{ unde } PQ = PS = l$                                                                    |                 |
| 2) Găsește relația pentru $y$ :                                                                                                      | 1 punct         |
| $y = c \left( 1 - \frac{l}{b} \right), \text{ unde } PQ = PS = l$                                                                    |                 |
| 3) Arată că piciorul bisectoarei duse din $A$ aparține locului geometric                                                             | 1 punct         |
| 4) Arată că dacă $BR_1 = AC = b$ , $R_1 \in (AB)$ iar $D \in (AC)$ cu $DR_1 \parallel BC$ ,<br>atunci $D$ aparține locului geometric | 2 puncte        |
| 5) Arată că segmentul $[DP]$ este locul geometric căutat și verifică egalitatea $P_1Q_1 = R_1S_1$                                    | 2 puncte        |
| <b>Total:</b>                                                                                                                        | <b>7 puncte</b> |