

SOLUȚII

Problema 10.1:

Soluție: Din $(x_i - 25)^2 \geq 0$ avem

$$x_i^2 \geq 2 \cdot x_i \cdot 25 - 25^2 \Rightarrow x_i^2 \geq 25(2x_i - 25) \Rightarrow \frac{x_i^2}{2x_i - 25} \geq 25 \quad \forall i = \overline{1;4}. \text{ În baza } MA \geq MG \text{ căpătăm}$$

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 4 \sqrt[4]{\frac{x_1^2}{2x_2 - 25} + \frac{x_2^2}{2x_3 - 25} + \frac{x_3^2}{2x_4 - 25} + \frac{x_4^2}{2x_1 - 25}} =$$

$$= 4 \sqrt[4]{\frac{x_1^2}{2x_2 - 25} + \frac{x_2^2}{2x_3 - 25} + \frac{x_3^2}{2x_4 - 25} + \frac{x_4^2}{2x_1 - 25}} \geq 4 \sqrt[4]{25 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 25} = 4 \cdot 25 = 100.$$

Deoarece $E(25; 25; 25; 25) = 100$ rezultă că $\min_{x_i > 12,5} E(x_1, x_2, x_3, x_4) = 100$.

Problema 10. 2:

Soluție: Fie n - numărul tuturor pătrățelelor negre din dreptunghiul dat. Orice pătrat 3×3 din acest dreptunghi are exact 7 pătrățele albe și 2 pătrățele negre. Într-adevăr dacă pătrățul central este alb atunci acest pătrat are exact 2 pătrățele negre și deci celelalte 7 sunt albe. Dacă însă pătrățul central este negru atunci el are exact 7 pătrățele albe și deci celelalte sunt negre.

Considerăm pătratul format din primele 2016 coloane ale dreptunghiului dat și îl divizăm în pătrate

$$3 \times 3. \text{ Vom avea } \left(\frac{2016}{3}\right)^2 = 672^2 \text{ asemenea pătrate și deci pătratul considerat va avea } 2 \cdot 672^2$$

pătrățele negre. Deci ultima coloană a dreptunghiului dat are $n - 2 \cdot 672^2$ pătrățele negre. În mod analog deducem că pătratul format din ultimele 2016 coloane ale dreptunghiului dat are $2 \cdot 672^2$ pătrățele negre. Deci în prima coloană a dreptunghiului dat sunt $n - 2 \cdot 672^2$ pătrățele negre c.t.d.

Problema 10. 3:

Soluție: Submulțimea $C = \{673; 674; \dots; 2016\}$ are $2016 - 672 = 1344$ elemente și $\forall c \in C \exists a \geq 3 \cdot 673 = 2019$ adică nu satisface condiția din problemă. Deci $n > \text{card } C = 1344$.

Fie acum $B \subset A$ și $\text{card } B = 1345$. Notăm $B_1 = B \cap \{1; 2; \dots; 672\}$, $B_1 = B \cap C$, $m = \text{card } B_1$. Deoarece $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ iar $B_1 \cup B_2 = B$ rezultă că mulțimea B_2 constă din $1345 - m$ elemente. Pentru orice $x \in B_1$ există un singur număr $k_x \in N^*$ astfel că $3^{k_x} \cdot x \in C$ și considerăm aplicația $f: B_1 \rightarrow C$, $f(x) = 3^{k_x} \cdot x$ sunt posibile 2 cazuri:

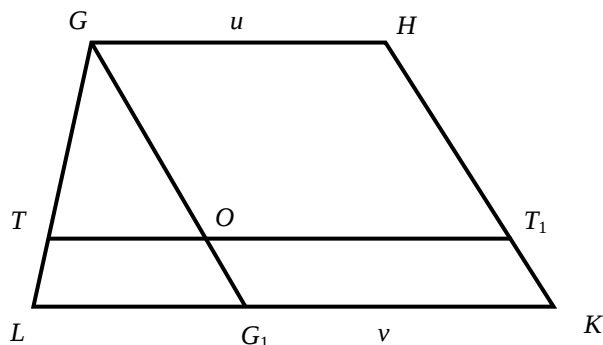
- 1) f este injectivă;
- 2) f nu este injectivă.

În primul caz $\text{card } f(B_1) = \text{card } B_1 = m$. Deoarece $f(B_1) \subseteq C$, $B_2 \subseteq C$ și $\text{card } f(B_1) + \text{card } B_2 = m + 1345 - m = 1345 > 1344 = \text{card } C$ rezultă $f(B_1) \cap B_2 \neq \emptyset$ adică $\exists b \in B_1$ și $a \in B_2$ încât $f(b) = a$. Deci $3^{k_b} \cdot b = a$, unde $k_b \in N^*$, $a, b \in B$.

În cazul al doilea $\exists a, b \in B_1$, $a > b$ astfel că $3^{k_a} \cdot a = 3^{k_b} \cdot b$. Deci $k_a < k_b$ și prin urmare $a = 3^{k_b - k_a} \cdot b$. Deci $n = 1345$.

Problema 10. 4:

Soluție: Lemă. Dacă în trapezul cu bazele u, v , ($u < v$) punctul T de pe latura laterală o împarte în raportul k începând de la baza mare atunci segmentul tăiat de laturile laterale pe dreapta ce trece prin T paralel bazelor are lungimea egală cu $\frac{v+ku}{1+k}$.



Demonstrație. Fie $GHKL$ trapez, $GH \parallel KL$, $GH = u, KL = v, u < v, T \in GL$ și $\frac{LT}{TG} = k$.

Luăm punctele $G_1 \in KL$ și $T_1 \in HK$ astfel că $GG_1 \parallel HK$ și $TT_1 \parallel KL$. Fie O punctul de intersecție al segmentelor GG_1 și TT_1 . Din asemănarea triunghiurilor GLG_1 și GTO avem

$$\frac{LG_1}{TO} = \frac{GL}{GT} = \frac{GT+LT}{GT} = 1 + \frac{LT}{GT} = 1 + k.$$

Deci $TO = \frac{LG_1}{1+k} = \frac{v-u}{1+k}$. Atunci $TT_1 = T_1O + TO = u + \frac{v-u}{1+k} = \frac{v+ku}{1+k}$.

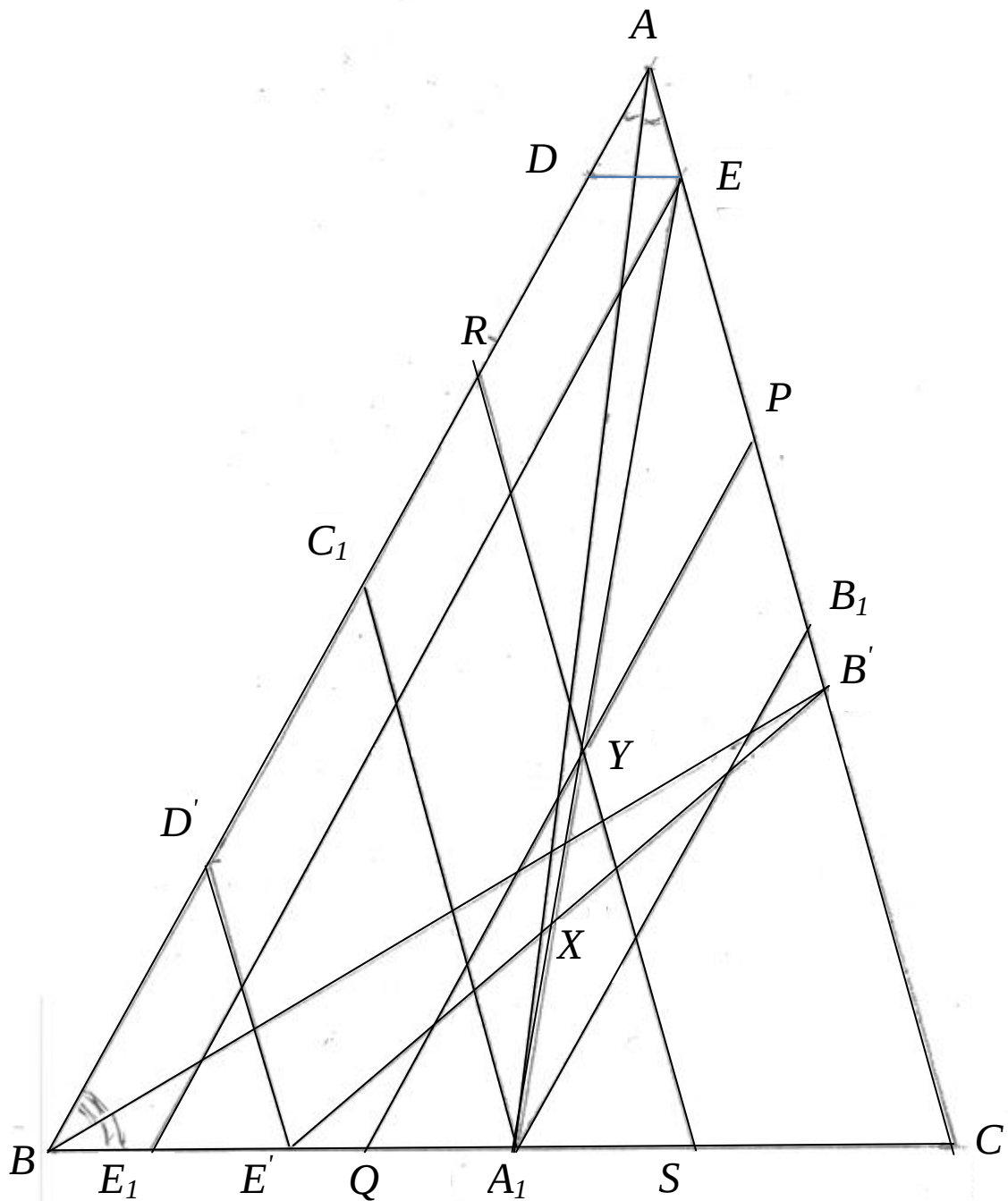
Să demonstrăm 1) $\Rightarrow$ 2).

Fie AA_1 bisectoarea unghiului A ($A_1 \in BC$) și $C_1 \in AB, B_1 \in AC$ astfel că $A_1C_1 \parallel AC$ și $A_1B_1 \parallel AB$. Paralelogramul $AB_1A_1C_1$ este romb și deci punctul X se va afla în interiorul acestui romb. Dacă d este lungimea segmentului tăiat de două laturi ale triunghiului ABC pe dreapta ce trece prin X paralel la cea de-a treia atunci $A_1C_1 < d < BC = a$.

Din teorema bisectoarei în triunghi avem $A_1B = \frac{ac}{b+c}$ și $A_1C = \frac{ab}{b+c}$. Din asemănarea triunghiurilor ABC și C_1BA_1 rezultă că $\frac{AC}{C_1A_1} = \frac{BC}{BA_1}$, de unde

$$A_1C_1 = \frac{AC \cdot A_1B}{BC} = \frac{b \cdot \frac{ac}{b+c}}{a} = \frac{bc}{b+c}.$$

Deci $\frac{bc}{b+c} < a$ de unde $bc < a(b+c)$.



Să demonstrăm acum $2) \Rightarrow 1)$. Fie $D \in AB$ astfel că $BD = AC = b$ iar $E \in AC$ astfel că $DE \parallel BC$. Luăm $E_1 \in AC$ astfel că $EE_1 \parallel AB$. Fie Y un punct arbitrar din interiorul segmentului A_1E și P, Q punctele de intersecție ale dreptei ce trece prin Y paralel la AB cu laturile AC și BC respectiv iar R, S punctele de intersecție ale dreptei ce trece prin Y paralel la AC cu laturile AB și BC respectiv. Dacă $\frac{EY}{YA_1} = k$ atunci conform teoremei lui Tales avem

$$\frac{EP}{PB_1} = \frac{EY}{YA_1} = \frac{CS}{SA_1} = k.$$

În baza lemei, din trapezul $B_1A_1E_1E$ avem $PQ = \frac{EE_1 + kA_1B_1}{1+k}$ iar din trapezul A_1C_1AC

$$RS = \frac{AC + kA_1C_1}{1+k}.$$

Deoarece $EE_1 = BD = AC$ și $A_1B_1 = A_1C_1$ rezultă că $PQ = RS$.

Dacă $B' \in AC$ și BB' bisectoarea unghiului ABC iar $D' \in AB$ astfel ca $AD' = BC = a$ atunci din ipoteza $a > \frac{bc}{b+c} = AC_1$ rezultă că $D' \in BC_1$. Dacă $E' \in BC$ și $D'E' \parallel AC$ atunci analog se demonstrează că, orice punct Z din interiorul segmentului $B'E'$ satisface condiția: segmentele tăiate de laturile triunghiului ABC pe dreptele ce trec prin Z paralel la AB și respectiv BC sînt congruente. Din asemănarea $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ avem $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ și deci $AE = \frac{AC \cdot AD}{AB} = \frac{b(c-a)}{c}$. Din teorema bisectoarei deducem $AB' = \frac{bc}{a+c} \left(CB' = \frac{ab}{a+c} \right)$. Deci $AE < AB' \Leftrightarrow \frac{b(c-a)}{c} < \frac{bc}{a+c} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \frac{c-a}{c} < \frac{c}{a-c} \Leftrightarrow c^2 - a^2 < c^2$, și astfel $B' \in CE$. Prin urmare segmentele $[A_1E]$ și $[B'E']$ au un punct comun X care, evident, satisface condiției 1) c.t.d.

A 60-a OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ DE MATEMATICĂ

Chișinău, 26 februarie – 29 februarie 2016

Clasa a X-a, prima zi

Barem de corectare

Problema № 10.1:

- 1) Demonstrează $\frac{x_i^2}{2x_i - 25} \geq 25 \forall i = \overline{1; 4}$ 3 puncte
- 2) Aplică $MA \geq MG$ și obține $E(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq 100$ 3 puncte
- 3) $E(25; 25; 25; 25) = 100$ 1 punct
- Total:** 7 puncte

Problema № 10.2:

- 1) Demonstrează că fiecare pătrat 3×3 conține exact 7 pătrățele albe și 2 negre de dimensiunile 1×1 . 4 puncte
- 2) Demonstrează că pătratul format din primele 2016 coloane, de asemenea și pătratul care conține ultimele 2016 coloane conține:
- a) 672^2 pătrate 3×3 1 punct
- b) $2 \cdot 672^2$ - pătrate negre 1 punct
- c) Numărul de pătrățele negre este $n - 2 \cdot 672^2$ (unde n este numărul total de pătrățele negre) 1 punct
- Concluzie: în I și ultima coloană sunt $n - 2 \cdot 672^2$ pătrățele negre.
- Total:** 7 puncte

Problema № 10.3:

- 1) Demonstrează $n > 1344$ 2 puncte
- 2) Pentru $B \subset A$ card $B = 1345$
Consideră $B_1 = B \cap \{1; 2; \dots; 672\}$ și $B_2 = B \cap \{673; 674; \dots; 2016\}$ 1 punct
- 3) Consideră funcția $f: B_1 \rightarrow \{673; 674; \dots; 2016\}$, $f(x) = 3^{k_x} \cdot x$ 1 punct
- 4) Cazul f injectivă 1 punct
- 5) Cazul f neinjectivă 1 punct
- 6) Concluzie finală $n = 1345$ 1 punct
- Total:** 7 puncte

Problema № 10.4:

- 1) Lema despre trapez 1 punct
- 2) $1) \Rightarrow 2)$ 3 puncte
- 3) $2) \Rightarrow 1)$ 3 puncte
- Total:** 7 puncte