

A 59-a OLIMPIADĂ REPUBLICANĂ DE MATEMATICĂ

Chișinău, 27 februarie – 2 martie 2015

Clasa a X-a, prima zi

SOLUȚII

Problema 10.1:

Deoarece

$$(a - 2m)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 4m(a - m)$$

$$(b - 2m)^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq 4m(b - m)$$

$$(c - 2m)^2 \geq 0 \Rightarrow c^2 \geq 4m(c - m)$$

$$\begin{aligned} \text{apoi aplicând } MA \geq MG \text{ avem } \frac{a^2}{b-m} + \frac{b^2}{c-m} + \frac{c^2}{a-m} &\geq \frac{4m(a-m)}{b-m} + \frac{4m(b-m)}{c-m} + \frac{4m(c-m)}{a-m} = \\ &= 4m \left(\frac{a-m}{b-m} + \frac{b-m}{c-m} + \frac{c-m}{a-m} \right) \geq 4m \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{a-m}{b-m} \cdot \frac{b-m}{c-m} \cdot \frac{c-m}{a-m}} = 12m. \end{aligned}$$

Problema 10. 2:

$$\frac{1}{13x} + \frac{1}{31y} = \frac{1}{2015} \cdot | 2015 \Leftrightarrow 155y + 65x = xy \Leftrightarrow 5(31y + 13x) = xy. \text{ Deci } x:5 \text{ ori } y:5$$

1) $x = 5k$. Avem $5(31y + 13 \cdot 5k) = 5k \cdot y:5 \Leftrightarrow 31y + 65k = ky \Leftrightarrow y(k - 31) = 65k$

$$y = \frac{65k}{k-31} = 65 + \frac{2015}{k-31} \text{ Deci } k-31 \in D_{2015} = \{1; 5; 13; 31; 65; 155; 403; 2015\}$$

$$\begin{aligned} \text{Astfel avem mulțimea de soluții } \left\{ 5k; \frac{65k}{k-31} \mid k \in \{32; 36; 44; 62; 96; 189; 434; 20465\} \right\} = \\ = \{(160; 2080), (180; 468), (220; 220), (310; 130), (480; 96), (930; 78), (2170; 70), (10230; 66)\} \end{aligned}$$

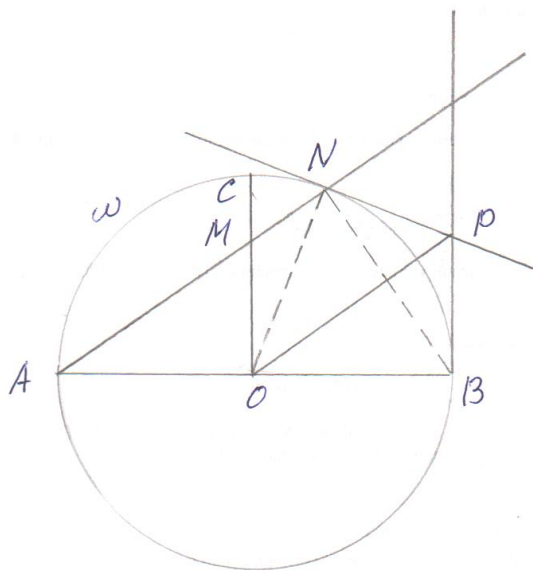
2) $y = 5n$. Avem $5(31 \cdot 5n + 13x) = 5nx \Leftrightarrow 155n + 13x = nx \Leftrightarrow (n-13)x = 155n \Leftrightarrow$

$$x = \frac{155n}{n-13} = 155 + \frac{2015}{n-13}. \text{ Deci } n-13 \in D_{2015} \text{ și obținem mulțimea de soluții}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{155n}{n-13}; 5n \mid n \in \{14; 18; 26; 44; 78; 168; 416; 2028\} \right\} = \\ = \{(156; 10140), (160; 2080), (168; 840), (189; 390), (220; 220), (310; 130), (558; 90), (2170; 70)\} \end{aligned}$$

Răspuns: $\{(156; 10140), (160; 2080), (168; 840), (180; 468), (180; 468), (220; 220), (310; 130), (480; 96), (558; 908) (930; 78), (2170; 70), (10230; 66)\}$

Problema 10. 3:



Deoarece PN și PB sunt tangente la ω rezultă că $NP = PB$ și OP este bisectoarea $\angle NOB$. Cum $NO = BO$ avem $OP \perp NB$. Deoarece $m\angle ANB = 90^\circ$ rezultă că AN și OP sunt paralele. Atunci triunghiurile dreptunghice AOM și OBP sunt congruente și deci $MO = PB$. Astfel $MO = NP$. Deci $MONP$ - trapez isoscel, deci inscriptibil.

Problema 10. 4:

Divizăm cercul dat prin 5 raze în 5 sectoare cu mărimi egale cu 72° fiecare. Deoarece există o infinitate de asemenea divizări și doar un număr finit de puncte $A_1, A_2, \dots, A_{2015}$ se va găsi o divizare astfel încât nici unul din punctele date nu aparține nici unei raze a acestei divizări. Cum $2015 = 5 \cdot 403$ în această divizare vom avea un sector în interiorul căruia vor fi cel mult 403 puncte și un sector în interiorul căruia vor fi cel puțin 403 puncte. Remarcăm că orice rază a cercului dat conține cel mult un punct din cele date.

Numim mișcarea a unui sector o rotație a sa într-un sens până când unul din punctele interioare părăsește sectorul său până când unul din punctele exterioare intră în interiorul acestuia. Evident că în rezultatul unei singure mișcări numărul punctelor din interiorul sectorului se modifică cel mult cu o unitate (el se conservă când se produce simultan intrarea unui punct și ieșirea altuia).

După un număr finit de mișcări a sectorului cu cel mult 403 puncte el se va suprapune pe sectorul cu cel puțin 403 puncte. Variația cu cel mult o unitate a numărului de puncte din interiorul sectorului ne asigură ca după careva mișcare în interior vor fi exact 403 puncte.

Barem de corectare

Problema 10.1:

- | | |
|--|-----------------|
| $\left. \begin{array}{l} a^2 \geq 4m(a-m) \\ 1) \ b^2 \geq 4m(b-m) \\ c^2 \geq 4m(c-m) \end{array} \right\}$ | 4 puncte |
| 2) Aplicarea $MA \geq MG$ | 3 puncte |
| Total: | 7 puncte |

Problema 10.2:

- | | |
|----------------------------|-----------------|
| 1) Forma $155y + 65x = xy$ | 1 punct |
| 2) $x:5$ ori $y:5$ | 1 punct |
| 3) cazul $x:5$ | 2 puncte |
| 4) cazul $y:5$ | 2 puncte |
| 5) răspuns corect | 1 punct |
| Total: | 7 puncte |

Problema 10.3:

- | | |
|-------------------------------|-----------------|
| 1) $OP \perp NB$ | 2 puncte |
| 2) $AN \parallel OP$ | 2 puncte |
| 3) $MO = PB$ | 2 puncte |
| 4) $MOPN$ trapez inscriptibil | 1 punct |
| Total: | 7 puncte |

Problema 10.4:

- | | |
|--|-----------------|
| 1) Existența divizării în 5 sectoare de 72° prin raze ce nu conțin nici un punct dat | 1 punct |
| 2) Existența sectoarelor cu cel mult și respectiv cel puțin 403 puncte | 1 punct |
| 3) Conceptul de mișcare | 2 puncte |
| 4) Variația după o mișcare cu cel mult o unitate a numărului de puncte din interiorul sectorului | 1 punct |
| 5) Un număr finit de mișcări duce la suprapunerea celor 2 sectoare | 1 punct |
| 6) Concluzia finală | 1 punct |
| Total: | 7 puncte |