

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA
Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

7.5. Calculați ultimele două cifre ale numărului $7^{5^{5^5}}$.

Soluție:

Să observăm că dacă a și b sunt numere naturale, atunci $(a+1)^b = aK+1$, unde K este un număr natural.

Numărul $5^{5^5} = (4+1)^{5^5}$ poate fi reprezentat în forma $4m+1$, unde m este un număr natural.

Prin urmare, avem $7^{5^{5^5}} = 7^{4m+1} = 7^{4m} \cdot 7 = 2401^m \cdot 7 = (2400+1)^m \cdot 7$.

Numărul $(2400+1)^m$ poate fi reprezentat în forma $100n+1$.

Așadar, $7^{5^{5^5}} = (100n+1) \cdot 7 = 100 \cdot 7n + 7$. Prin urmare, ultimele 2 cifre sunt 07.

Răspuns: 07.

7.6. Fie numerele naturale nenule x și y , astfel încât $4^{x-1} + 4^y \leq 2^{x+y}$. Demonstrați că numărul $2^x + 2^y$ este divizibil cu 3.

Soluție. $4^{x-1} + 4^y \leq 2^{x+y} \Rightarrow \frac{4^x}{4} + 4^y \leq 2^{x+y} \Rightarrow 4^x + 4^{y+1} - 2^2 \cdot 2^x \cdot 2^y \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 2^{y+1} + (2^{y+1})^2 \leq 0 \Rightarrow (2^x - 2^{y+1})^2 \leq 0 \Rightarrow (2^x - 2^{y+1})^2 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^{y+1} \Rightarrow x = y+1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2^x + 2^y = 2^{y+1} + 2^y = 2^y \cdot (2^1 + 1) = 3 \cdot 2^y$ care este divizibil cu 3. (q.e.d.)

7.7. Demonstrați că $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999}{10\,000} < 0,01$.

Soluție.

Notăm $N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999}{10\,000}$. Atunci $N^2 =$

$$\frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999^2}{10\,000^2} < \frac{1^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{3^2}{4^2 - 1^2} \cdot \frac{5^2}{6^2 - 1^2} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999^2}{10\,000^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{1^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{5^2}{5 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999^2}{10\,001 \cdot 9\,999} = \frac{1}{10\,001} < \frac{1}{10\,000}.$$

Prin urmare, $N = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9\,999}{10\,000} < \frac{1}{100} = 0,01$. (q.e.d.)

7.8. Triunghiul ABC este echilateral. Pe prelungirea laturii AC , după punctul C , se consideră punctul D , iar pe prelungirea laturii BC , după punctul C , se consideră punctul E , astfel încât $[BD] \equiv [DE]$. Demonstrați că $[AD] \equiv [CE]$.

Soluție.

Pe segmentul CE depunem punctul F astfel încât $[FE] \equiv [BC]$.

$\triangle BDC \overset{LUL}{\equiv} \triangle EDF$ deoarece ($m(\angle B) = m(\angle E)$, $[BD] \equiv [DE]$, $[BC] \equiv [FE]$).

Prin urmare, $[CD] \equiv [DF]$. Deoarece $m(\angle DFC) = m(\angle DCF) = m(\angle ACB) = 60^\circ$.

Triunghiul CDF este echilateral. Deci, $[CF] \equiv [CD]$ și

$AD = AC + DC = BC + CF = FE + CF = CE$. (q.e.d.)

