

A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chișinău, 28 februarie – 3 martie 2014

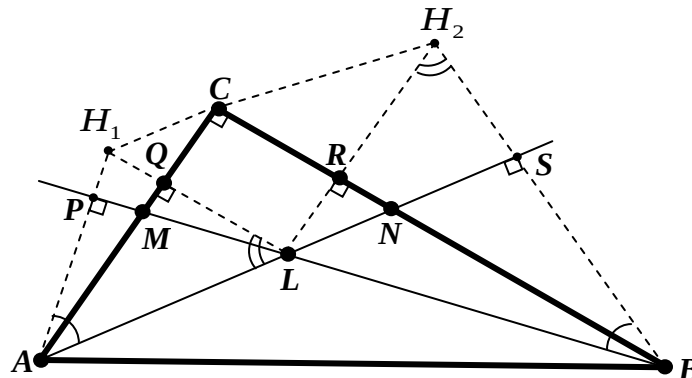
Clasa a XII-a, ziua a doua

12.5. Avem $a_n = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^n} dx + \int_0^1 e^x e^{\sqrt[n]{x}} dx$. Dar

$$\int_0^1 e^x e^{\sqrt[n]{x}} dx = \left| \begin{matrix} x = t^n \\ dx = nt^{n-1} dt \end{matrix} \right| = \int_0^1 e^t e^{t^n} nt^{n-1} dt = \int_0^1 e^x e^{x^n} nx^{n-1} dx \text{ Rezultă că}$$

$$a_n = \int_0^1 e^x \cdot e^{x^n} (1 + nx^{n-1}) dx = \int_0^1 e^{x+x^n} (x+x^n)' dx = e^{x+x^n} \Big|_0^1 = e^2 - 1$$

12.6.



Fie $AP \perp LM$, $P \in ML$, $LQ \perp AM$, $Q \in AM$. $AP \cap LQ = H_1$.

Fie $LR \perp BN$, $R \in BN$, $BS \perp LN$, $S \in LN$. $LP \cap BS = H_2$.

Patrulaterul $APSB$ - inscriptibil . Rezultă că $\square H_1AL \equiv \square H_2BL$.

Avem $\square ALH_1 \equiv \square ANC \equiv \square BH_2L$. De unde $\triangle AH_1L \sim \triangle BLH_2$.

Notăm $RH_2 = x$, $RL = y \Rightarrow LQ = kx$, $H_1Q = ky$.

Deci, $\square H_1QC \sim \square CRH_2 \Rightarrow \square H_1CQ \equiv \square CH_2R \Rightarrow M(\square H_1CQ) + M(\square H_2CR) = 90^\circ$

12.7. Fie $F(t)$ o primitivă a funcției $(f'(t))^2 + (4t^2 + 2) \cdot f^2(t)$. De unde rezultă că

$\int_0^x [f^2(t) + (4t^2 + 2) f^2(t)] dt = F(x) - F(0)$. Deci, $2xf^2(x) = F(x) - F(0)$. Derivând ambele părți obținem:

$$2f^2(x) + 4xf(x)f'(x) = (f'(x))^2 + (4x^2 + 2)f^2(x) \Leftrightarrow (f'(x) - 2xf(x))^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) - 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 2xf(x). \text{ Astfel, } (\ln f(x))' = 2x \Rightarrow \ln f(x) = x^2 + C \Rightarrow f(x) = Ce^{x^2}.$$

Cum $f(0) = 2014 \Rightarrow C = 2014$.

Răspuns: $f(x) = 2014e^{x^2}$.

12.8 Avem $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Notăm $A^3 = X$

$$\text{Dacă } X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \Rightarrow X^{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 6b_n & 3a_n + 5b_n & 3a_n + 5b_n \\ 3a_n + 5b_n & 2a_n + 6b_n & 3a_n + 5b_n \\ 3a_n + 5b_n & 3a_n + 5b_n & 2a_n + 6b_n \end{pmatrix}$$

$$X^{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ b_{n+1} & b_{n+1} & a_{n+1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 6b_n \\ b_{n+1} = 3a_n + 5b_n \end{cases} \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6b_{n+1} = 2a_{n+1} + 6(3a_n + 5b_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + 18a_n + 30b_n. \text{ Dar } b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n) \Rightarrow a_{n+2} = 2a_{n+1} + 18a_n + 5(a_{n+1} - 2a_n). \text{ Astfel,}$$

$$a_{n+2} = 7a_{n+1} + 8a_n \text{ și } b_n = \frac{1}{6}(a_{n+1} - 2a_n).$$

Găsim formula termenului general al șirului a_n . Putem scrie $a_{n+2} + a_{n+1} = 8(a_{n+1} + a_n)$. Fie $y_n = a_n + a_{n-1}$. Atunci avem $y_{n+1} = 8y_n$, de unde $y_{n+1} = 8^{n-1}y_2 = 8^{n-1}(a_2 + a_1) = 24 \cdot 8^{n-1} = 3 \cdot 8^n$. Prin urmare, $a_n + a_{n-1} = 3 \cdot 8^{n-1}$ și $a_n = 3 \cdot 8^{n-1} - a_{n-1}$. Prin inducție, se arată că $a_n = \frac{1}{3}(8^n + (-1)^n \cdot 2)$ și

$$b_n = \frac{1}{3}(8^n + (-1)^n). \text{ Deci, cu } a_n = \frac{1}{3}(8^n + (-1)^n \cdot 2), b_n = \frac{1}{3}(8^n + (-1)^n) \text{ avem}$$

$$A^{3n} = X^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & b_n \\ b_n & a_n & b_n \\ b_n & b_n & a_n \end{pmatrix}, A^{3n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} a_n + b_n & a_n + b_n & 2b_n \\ 2b_n & a_n + b_n & a_n + b_n \\ a_n + b_n & 2b_n & a_n + b_n \end{pmatrix},$$

$$A^{3n+2} = A^n \cdot A^2 = \begin{pmatrix} a_n + 3b_n & 2a_n + 2b_n & a_n + 3b_n \\ a_n + 3b_n & a_n + 3b_n & 2a_n + 2b_n \\ 2a_n + 2b_n & a_n + 3b_n & a_n + 3b_n \end{pmatrix}$$