

Soluții

11.1. Din enunț avem $x_1 > 1$. În continuare $x_2 = \frac{x_1^2}{x_1 - 1} > 1$. Prin metoda inducției matematice se arată

$x_n > 1$ pentru orice $n \geq 1$. Șirul este strict crescător, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2}{x_n - 1} - x_n = \frac{x_n}{x_n - 1} > 0$,

pentru orice $n \geq 1$. Presupunem că șirul este mărginit, atunci el este convergent. Fie x limita lui. Din relația de recurență se obține:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{x_n - 1} \Rightarrow x = \frac{x^2}{x - 1} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \text{ contradicție pentru că } x_n > 1. \text{ Deci șirul nu}$$

este mărginit și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Pentru a afla $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n}$ folosim lema lui Cezaro-Stolz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{x_{n+1} - x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x_n} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x_n} = 1.$$

Răspuns: 1.

11.2. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului din enunț, notat $ABCD$, iar $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, OO_1$ perpendiculare la planul β și $A_1, B_1, C_1, D_1, O_1 \in \beta$. Atunci $AA_1 \parallel OO_1 \parallel CC_1$ rezultă că punctele A, A_1, O_1, C_1, C, O se află într-un plan, iar $[OO_1]$ este linia mijlocie a trapezului AA_1C_1C . Deci $AA_1 + CC_1 = 2 \cdot OO_1$. Analog $BB_1 + DD_1 = 2 \cdot OO_1$.

Suma distanțelor de la vîrfurile paralelogramului $ABCD$ pînă la planul β este $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 4 \cdot OO_1 \leq 4 \cdot OP = 4a$.

11.3 Avem $f'(x) = 4x^3 - 4ax = 4x \cdot (x^2 - a)$.

I. Pentru $a \leq 0$ funcția f are un singur punct critic care este punct de minim. Deci pentru $a \leq 0$ funcția f poate lua cea mai mare valoare pe $[-2, 1]$ doar în punctele $x = -2$ sau $x = 1$. Observăm că funcția f este pară, rezultă că $f(-2) = f(2) > f(1)$ (pentru $a \leq 0$ funcția f este crescătoare pe $[0, +\infty)$). Astfel $\max_{[-2, 1]} f(x) = f(-2) = 16 - 8a + 3a^2$.

II. Dacă $a > 0$ funcția f are 3 puncte critice: $x = -\sqrt{a}$; $x = 0$; $x = \sqrt{a}$.

Ușor se arată că $x = 0$ este punct de maxim, $x = \sqrt{a}$ și $x = -\sqrt{a}$ sunt puncte de minim.

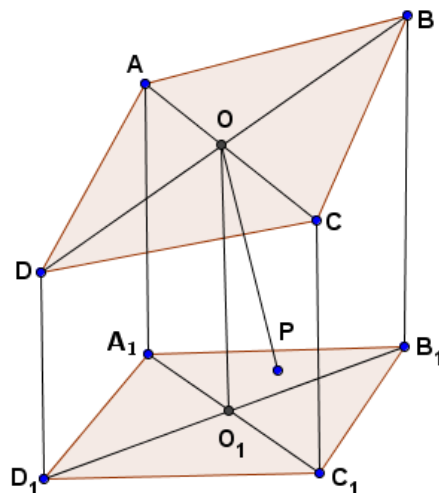
Luînd în considerație monotonia funcției f avem: $f(0) > f(-\sqrt{a})$ și $f(0) > f(\sqrt{a})$.

În continuare vom compara valorile $f(-2)$, $f(0)$ și $f(1)$. Avem $f(0) = 3a^2$, $f(1) = 3a^2 - 2a + 1$.

Evident pentru $a \geq 2$ se obține $f(0) \geq f(-2)$ și $f(0) > f(1)$.

Ușor se arată că pentru $a < 2$ se obține $f(-2) > f(0)$ și $f(-2) > f(1)$.

Răspuns: $\max_{[-2, 1]} f(x) = 3a^2 - 8a + 16$ pentru $a < 2$; $\max_{[-2, 1]} f(x) = 3a^2$ pentru $a \geq 2$.



11.4. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctg x$. Cum $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că f este pară și are graficul simetric față de Oy . Este suficient să demonstrăm inegalitatea cerută pentru

$x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$. Din $f'(x) = \arctg x + \frac{x}{x^2+1} \geq 0, \forall x \geq 0$, rezultă că f este crescătoare pe $[0, +\infty)$. În continuare $f''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^2} > 0$, rezultă că f este convexă pe $[0, +\infty)$.

Pentru $n = 1$, avem $\frac{1}{x_1^2} = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_1 \arctg x_1 = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$.

Fie $n > 1$, atunci pentru $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$, avem:

$$\frac{\sum_{k=1}^n f(x_k)}{n} \geq f\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right) \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n x_k \arctg x_k}{n} \geq \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \cdot \arctg\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (2) \text{ și din } 1 = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k^2}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \dots \cdot x_n^2}} \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \geq 1. \quad (3)$$

Din (2) și (3) $\Rightarrow \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \geq 1$ și cum f este crescătoare pe $[0, +\infty)$ rezultă

$$f\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right) \geq f(1) \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n} \cdot \arctg\left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k}{n}\right) \geq \frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

Din (1) și (4), rezultă $\frac{\sum_{k=1}^n x_k \arctg x_k}{n} \geq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n x_k \arctg x_k \geq \frac{n\pi}{4}, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, +\infty)$.

Cum f este pară, rezultă că $\sum_{k=1}^n x_k \arctg x_k \geq \frac{n\pi}{4}, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.