

SOLUȚII ALE PROBLEMELOR

10.5. (ro) Determinați toate valorile parametrului real a pentru care ecuația $|ax-1| = ax^2 + (1-2a)x + 1$ are o unică soluție în $\mathcal{R}$.

10.5. (ru) Найдите все значения действительного параметра a , чтобы уравнение $|ax-1| = ax^2 + (1-2a)x + 1$ имело единственное решение в $\mathcal{R}$.

Rezolvare. 1. Fie $a=0$, atunci ecuația are o singură soluție reală, $x=0$.

Observăm că 0 este soluție a ecuației date oricare ar fi $a \in \mathcal{R}$.

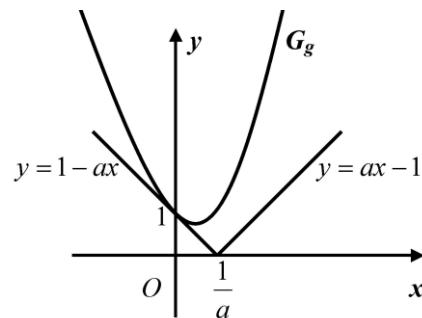
Va trebui să determinăm valorile parametrului real a pentru care doar numărul zero este soluție a ecuației.

2. Fie $a > 0$, atunci

$$|ax-1| = \begin{cases} ax-1, & \text{dacă } x \geq \frac{1}{a}, \\ 1-ax, & \text{dacă } x < \frac{1}{a} \end{cases}.$$

Într-un sistem de coordonate carteziene rectangulare xOy schițăm graficele funcțiilor $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $f(x) = |ax-1|$ și $g: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $g(x) = ax^2 + (1-2a)x + 1$.

Condiția problemei va fi verificată dacă dreapta $y = 1-ax$ și graficul funcției g vor avea doar punctul $(0;1)$ comun.

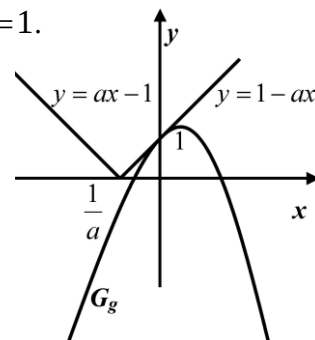


$$\text{Considerăm ecuația } ax^2 + (1-2a)x + 1 = 1-ax \Leftrightarrow ax^2 + (1-a)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ x = \frac{a-1}{a} \Rightarrow a=1. \end{cases}$$

Verificăm dacă parabola are puncte comune cu dreapta $y = x-1$:

$x^2 - x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Deci pentru $a=1$ se verifică condiția problemei.

$$3. \text{ Fie } a < 0, \text{ atunci } |ax-1| = \begin{cases} ax-1, & \text{dacă } x < \frac{1}{a}, \\ 1-ax, & \text{dacă } x \geq \frac{1}{a} \end{cases}.$$



Graficele funcțiilor f și g pot avea poziția alăturată în sistemul de coordonate xOy . Condiția problemei va fi verificată dacă dreapta $y = 1-ax$ și graficul funcției g au doar punctul $(0;1)$ comun. Aceasta, conform calculelor de mai sus, este imposibil pentru $a < 0$.

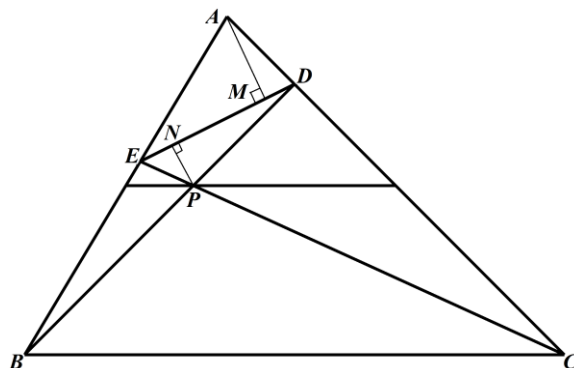
Răspuns: $a \in \{0;1\}$

10.6. (ro) Fie P un punct interior al liniei mijlocii a triunghiul ABC , determinată de mijloacele laturilor AB și AC . Dreptele BP și CP intersectează laturile AC și AB în punctele D și E , respectiv. Demonstrați că raportul distanțelor de la punctele A și P la dreapta DE este egal cu 2.

10.6. (ru) Пусть P – внутренняя точка средней линии треугольника ABC , с концами на сторонах AB и AC . Прямые BP и CP пересекают стороны AC и AB в точках D и E , соответственно. Докажите, что соотношение расстояний от точек A и P до прямой DE равно 2.

Demonstrație. Fie $M = pr_{DE}A$, $N = pr_{DE}P$.

$$\text{Vom demonstra că } \frac{AM}{PN} = 2 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}DE \cdot AM}{\frac{1}{2}DE \cdot PN} = 2 \Leftrightarrow \frac{A_{ADE}}{A_{PDE}} = 2.$$



$$\frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} AE \cdot AD \cdot \sin(\angle BAC)}{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(\angle BAC)} = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC}.$$

$$\frac{\mathcal{A}_{PDE}}{\mathcal{A}_{BCP}} = \frac{\frac{1}{2} EP \cdot DP \cdot \sin(\angle DPE)}{\frac{1}{2} BP \cdot CP \cdot \sin(\angle DPE)} = \frac{EP \cdot DP}{BP \cdot CP}. \quad \mathcal{A}_{BCP} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABC}.$$

$$\frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{PDE}} = \frac{\mathcal{A}_{ADE}}{\mathcal{A}_{ABC}} \cdot \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{PDE}} = \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} \cdot \frac{2\mathcal{A}_{BCP}}{\mathcal{A}_{PDE}} = 2 \cdot \frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} \cdot \frac{BP \cdot CP}{EP \cdot DP}.$$

Rezolvarea problemei s-a redus la demonstrația relației $\frac{AE \cdot AD}{AB \cdot AC} \cdot \frac{BP \cdot CP}{EP \cdot DP} = 1$.

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ACE și transversala BD : $\frac{BE}{AB} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CP}{EP} = 1$. (1)

Aplicăm teorema lui Menelaus pentru triunghiul ABD și transversala CE : $\frac{CD}{AC} \cdot \frac{AE}{BE} \cdot \frac{BP}{DP} = 1$. (2)

Înmulțind membru cu membru egalitățile (1) și (2), obținem $\frac{AE \cdot AD \cdot BP \cdot CP}{AB \cdot AC \cdot EP \cdot DP} = 1$. c.c.t.d.

10.7. (ro) Să se afle toate numerele prime p pentru care reprezentarea zecimală a numărului $\frac{1}{p}$ are perioada de 5 cifre.

10.7. (ru) Найдите все простые числа p для которых десятичное представление числа $\frac{1}{p}$ имеет период в пять цифр.

Rezolvare. Avem $\frac{1}{p} = \overline{0, u_1 u_2 \dots u_n (abcde)}$ și notăm $u = \overline{u_1 u_2 \dots u_n}$, $v = \overline{(abcde)}$.

Atunci $\frac{10^n}{p} = \overline{u_1 u_2 \dots u_n} + \overline{0, (abcde)} = u + \frac{v}{10^5 - 1}$. Astfel $p((10^5 - 1)u + v) = 10^n(10^5 - 1)$. Prin urmare p trebuie să fie

divizor al numerelor 10^n ori $10^5 - 1 = 3^2 \cdot 41 \cdot 271$, adică $p \in \{2; 3; 5; 41; 271\}$. Avem $\frac{1}{41} = 0, (02439)$ și

$$\frac{1}{271} = 0, (00369).$$

Răspuns: 41, 271.

10.8. (ro) Colorăm 2014 puncte din plan fie cu alb, fie cu negru, astfel încât orice punct negru să fie centrul unui cerc ce trece prin trei puncte albe. Aflați numărul minim de puncte albe.

10.8. (ru) Красим 2014 точек плоскости либо в белый цвет, либо в черный, таким образом, чтобы любая черная точка могла бы послужить центром окружности проходящей через три белые точки. Найдите минимальное число белых точек.

Rezolvare.

Fie n – numărul punctelor albe, atunci numărul punctelor negre nu depășește C_n^3 .

Vom avea $C_n^3 + n \geq 2014 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + n \geq 2014 \Leftrightarrow n^3 - 3n^2 + 8n \geq 12084 \Leftrightarrow (n-1)^3 + 5n \geq 12083$ (*).

1) Dacă $n = 24$, atunci $(n-1)^3 + 5n = 23^3 + 120 = 12167 + 120 \geq 12083$.

2) Dacă $n = 23$, atunci $(n-1)^3 + 5n = 22^3 + 115 = 10648 + 115 < 12083$.

Deci cea mai mică soluție naturală a inecuației (*) este 24. Astfel, $n \geq 24$.

Considerăm o mulțime A de 24 de puncte din plan cu proprietățile că oricare 3 dintre ele sunt necoliniare și oricare patru dintre ele sunt neconciclice și le colorăm cu alb (asemenea mulțime poate fi construită prin metoda inducției matematice). Fie $M = \{X \mid X \text{ este centrul unui cerc ce trece prin trei puncte din } A\}$.

Evident $\text{card}M = C_{24}^3 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{6} = 2024$. Colorăm $2024 - 24 = 2000$ de puncte din mulțimea M cu negru și obținem o mulțime de puncte colorate conform cerințelor problemei.

Răspuns: 24.