A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 30 martie 2014

A treia probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică 2014

şi Olimpiada Internaţională de Matematică 2014

B9. Să se arate că nu există patru puncte distincte în plan astfel încât distanţa dintre oricare două dintre ele să fie un număr impar.

B10. Să se determine toate funcţiile $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care verifică egalitatea

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

B11. Fie ABC un triunghi cu unghiul ascuţit A. În interiorul triunghiului ABC se ia un punct P astfel încât m($\angle BAP$) = m($\angle ACP$) şi m($\angle CAP$) = m($\angle ABP$). Fie M şi N centrele cercurilor înscrise în triunghiul ABP şi, respectiv, în triunghiul ACP, iar R raza cercului circumscris triunghiului AMN. Să se arate că

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

B12. De-a lungul cercului sunt scrise n ($n \geq 1$) numere reale, a căror sumă este egală cu $n-1$. Să se arate că aceste numere pot fi notate în mod consecutiv cu $x_1, x_2, ..., x_n$, începând de la o poziţie oarecare, în sensul mişcării acelor ceasornicului, astfel încât $x_1+x_2+...+x_k \geq k-1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$.

Timp de lucru: 4 ore 30 minute. Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 30 марта 2014 г.

Третий отборочный тур для Балканской Математической Олимпиады 2014 г.

и Международной Математической Олимпиады 2014 г.

B9. Показать, что не существует четырех различных точек на плоскости таких, что расстояние между любыми двумя из них является нечетным числом.

B10. Найти все функции $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy$$

при любых $x, y \in \mathbf{R}$.

B11. Дан треугольник ABC с острым углом A. Внутри треугольника ABC берется точка P такая, что m($\angle BAP$) = m($\angle ACP$) и m($\angle CAP$) = m($\angle ABP$). Пусть M и N – центры окружностей, вписанных в треугольник ABP и в треугольник ACP, соответственно, и пусть R – радиус окружности, описанной около треугольника AMN. Показать, что

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

B12. По окружности написаны n ($n \geq 1$) действительных чисел, сумма которых равна $n-1$. Показать, что эти числа можно обозначить последовательным образом через $x_1, x_2, ..., x_n$, начиная с некоторой позиции, по часовой стрелке, так, чтобы $x_1+x_2+...+x_k \geq k-1$ при любом $1 \leq k \leq n$.

Время работы: 4 часа 30 минут. Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 очков.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!