A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 martie 2014

A doua probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică 2014

şi Olimpiada Internaţională de Matematică 2014

B5. Fie n ($n \geq 2$) numere pozitive $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, suma cărora este $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Să se arate că dacă $x_n \leq \frac{2}{3}$, atunci există k ($1 \leq k \leq n$), astfel încât $\frac{1}{3} \leq x_1 + x_2 + ... + x_k < \frac{2}{3}$.

B6. Numerele pozitive a, b şi c verifică egalitatea $abc = 1$. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a expresiei

$$E(a,b,c) = \frac{a^3+5}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+5}{b^3(c+a)} + \frac{c^3+5}{c^3(a+b)}.$$

B7. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor BAD şi BCD se intersectează în punctul K de pe diagonala BD. Fie M mijlocul diagonalei BD. O dreaptă, care trece prin vârful C paralel cu dreapta AD, intersectează dreapta AM în punctul P. Să se demonstreze că triunghiul DPC este isoscel.

B8. Fie n ($n \geq 2$) un număr natural. În plan se iau n puncte distincte $A_1, A_2, ..., A_n$. După aceasta mijloacele tuturor segmentelor cu extremităţile în oricare două dintre aceste puncte se colorează în roşu. Care este cel mai mic număr posibil de puncte roşii, care pot fi obţinute în acest mod?

Timp de lucru: 4 ore 30 minute. Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 29 марта 2014 г.

Второй отборочный тур для Балканской Математической Олимпиады 2014 г.

и Международной Математической Олимпиады 2014 г.

B5. Даны n ($n \geq 2$) положительных чисел $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, сумма которых равна $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Показать, что, если $x_n \leq \frac{2}{3}$, то существует k ($1 \leq k \leq n$) такое, что $\frac{1}{3} \leq x_1 + x_2 + ... + x_k < \frac{2}{3}$.

B6. Положительные числа a, b и c удовлетворяют равенству $abc = 1$. Определить наименьшее возможное значение выражения

$$E(a,b,c) = \frac{a^3+5}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+5}{b^3(c+a)} + \frac{c^3+5}{c^3(a+b)}.$$

B7. Дан вписанный в окружность четырехугольник $ABCD$. Бисектриссы углов BAD и BCD пересекаются в точке K на диагонали BD. Пусть M середина диагонали BD. Прямая, которая проходит через точку C параллельно прямой AD, пересекает прямую AM в точке P. Докажите, что треугольник DPC равнобедренный.

B8. Пусть n ($n \geq 2$) – натуральное число. На плоскости берутся n различных точек $A_1, A_2, ..., A_n$. Затем середины всех отрезков с концами в любых двух из этих точек закрашиваются в красный цвет. Чему равно наименьшее возможное количество красных точек, которые можно получить таким образом?

Время работы: 4 часа 30 минут. Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 очков.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!