A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 3 martie 2014

Prima probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică 2014

şi Olimpiada Internaţională de Matematică 2014

B1. Să se determine toate perechile de numere naturale $(x,\ y)$ care satisfac ecuaţia

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}+\ 2\ =0.$$

B2. Numerele reale pozitive a şi b satisfac egalitatea $a+b=1$. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a expresiei $E\ (a,\ b)=3\cdot\sqrt{1+2a^2}\ +\ 2\cdot\sqrt{40+9b^2}$.

B3. Fie triunghiul ascuţitunghic ABC. Punctul D, situat pe latura (BC), este piciorul bisectoarei interioare duse din vârful A, iar punctele E şi F sunt proiecţiile ortogonale ale punctului D pe dreptele AB şi, respectiv AC. Dreptele CE şi BF se intersectează în punctul K astfel, încât dreapta BF taie cercul circumscris al triunghiului AEK în punctul L, diferit de K. Să se demonstreze că dreptele BF şi DL sunt perpendiculare.

B4. Fie $n\in N^*$. Se notează cu $p(n)$ produsul tuturor cifrelor nenule ale numărului n (dacă n are o singură cifră atunci $p(n)=n$). Să se determine cel mai mare divizor prim al numărului $x=\ p(1)+p(2)+\ .\ .\ .+\ p(999)$.

Timp de lucru: 4 ore 30 minute. Fiecare problemă rezolvată corect se apreciază cu 7 puncte.

MULT SUCCES!

58-ая МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА РЕСПУБЛИКИ МОЛДОВА

Кишинэу, 3 марта 2014 г.

Первый отборочный тур для Балканской Математической Олимпиады 2014 г.
и Международной Математической Олимпиады 2014 г.

B1. Найдите все пары натуральных чисел $(x,\ y)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}+2=0.$$

B2. Действительные положительные числа a и b удовлетворяют равенству $a+b=1$. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$E\ (a,\, b)=3\cdot\sqrt{1+2a^2}\ +\ 2\cdot\sqrt{40+9b^2}\,.$$

B3. Пусть задан остроугольный треугольник ABC. Точка D, расположенная на стороне (BC), является основанием внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A, а точки E и F являются ортогональными проекциями точки D на прямые AB и AC соответственно. Прямые CE и BF пересекаются в точке K так, что прямая BF пересекает описанную окружность треугольника AEK в точке L, отличной от K. Докажите, что прямые BF и DL перпендикулярны .

B4. Пусть $n\in N^*$. Обозначим через $p(n)$ произведение всех ненулевых цифр числа n (если n содержит лишь одну цифру, тогда $p(n)=n$). Найдите наибольший простой делитель числа $x=p(1)+p(2)+\ldots+p(999)$.

Время работы: 4 часа 30 минут. Каждая правильно решенная задача оценивается в 7 очков.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!