A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 30 martie 2014

A treia probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică 2014

şi Olimpiada Internaţională de Matematică 2014

Soluţii, barem

B9. Să se arate că nu există patru puncte distincte în plan astfel încât distanţa dintre oricare două dintre ele să fie un număr impar.

B9. Показать, что не существует четырех различных точек на плоскости таких, что расстояние между любыми двумя из них является нечетным числом.

Soluţie. Presupunem contrariul, şi anume că există astfel de patru puncte în plan. Luăm un sistem de coordonate astfel încât punctele să aibă coordonatele: $(0, 0)$, $(a, 0)$, (b, c), (d, e), unde $a > 0$.

Vom scrie $x \equiv y \pmod n$, dacă $x - y$ este un număr întreg care se divide cu n.

Se ştie că $(2m + 1)^2 = 4m(m + 1) + 1 \equiv 1 \pmod 8$.

Din ipoteze rezultă că a este impar, iar

$$b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 8,\ (a - b)^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 8,\ d^2 + e^2 \equiv 1 \pmod 8,$$
$$(a - d)^2 + e^2 \equiv 1 \pmod 8,\ (b - d)^2 + (c - e)^2 \equiv 1 \pmod 8. \qquad (1)$$

Scăzând din prima congruenţă a doua, obţinem $a^2 \equiv 2ab \pmod 8$, adică

$$a^2 - 2ab = 8k, \qquad (2)$$

iar $2ab$ este un număr întreg impar. Înmulţim toate coordonatele punctelor cu numărul impar a, ipotezele problemei rămân valabile şi păstrăm pentru a^2, ab, ac, ad, ae notaţiile a, b, c, d, e. Relaţiile (1) rămân valabile şi în notaţiile noi, iar (2) devine $a - 2b = 8m$, adică $b = a/2 - 4m$, $b \equiv a/2 \pmod 4$. Atunci $b^2 = a^2/4 + 4p$ şi $b^2 \equiv a^2/4 \pmod 4$.

Prin urmare, din (1) avem $c^2 \equiv 1 - b^2 \equiv 1 - a^2/4 \pmod 4$. Analog

$$d \equiv a/2 \pmod 4,\ e^2 \equiv 1 - a^2/4 \equiv c^2 \pmod 4. \qquad (3)$$

Ca urmare, $d \equiv b \pmod 4$, $b - d$ este un întreg divizibil prin 4. Din (1) avem

$$(c - e)^2 \equiv 1 - (b - d)^2 \equiv 1 \pmod 8 \qquad (4)$$

şi $(c - e)^2$ este un întreg.

Din (3) şi (4) obţinem

$$(c + e)^2 = 2c^2 + 2e^2 - (c - e)^2 \equiv 2(1 - a^2/4) + 2(1 - a^2/4) - 1 \equiv 3 - a^2 \equiv 2 \pmod 4. \quad (5)$$

Ca urmare, din (4) şi (5) şi din faptul că $(c - e)^2$ şi $(c + e)^2$ sunt numere întregi rezultă că

$$(c^2 - e^2)^2 = (c - e)^2(c + e)^2 \equiv 2 \pmod 4,$$

contradicţie cu (3).

Barem. 1. Alegerea sistemului de coordonate cu un punct în (0,0) şi altul pe o axă ....1 p.

2. Obţinerea relaţiei $a^2 - 2ab = 8k$ ....1 p.

3. Obţinerea relaţiei $e^2 \equiv 1 - a^2/4 \equiv c^2 \pmod 4$ ....2 p.

4. Obţinerea relaţiei $(c - e)^2 \equiv 1 \pmod 8$ ....1 p.

5. Obţinerea relaţiei $(c + e)^2 \equiv 2 \pmod 4$ ....1 p.

6. Obţinerea relaţiei $(c^2 - e^2)^2 \equiv 2 \pmod 4$ şi argumentarea contradicţiei ....1 p.

B10. Să se determine toate funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, care verifică egalitatea

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy$$

pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$.

B10. Найти все функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, которые удовлетворяют равенству

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy$$

при любых $x, y \in \mathbf{R}$.

Soluţie. Dacă punem în egalitatea dată

$$f(xf(y)+y)+f(xy+x)=f(x+y)+2xy \qquad (1)$$

$x=1,\ y=\frac{1}{2}$, obţinem

$$f(f(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2})+f(\tfrac{3}{2})=f(\tfrac{3}{2})+1.$$

Pentru $a=f(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}$ avem $f(a) = 1$.

Dacă punem în (1) $y = a$, atunci pentru orice $x \in \mathbf{R}$

$$f(x+a)+f(xa+x)=f(x+a)+2ax \Leftrightarrow f(xa+x)=2ax. \qquad (2)$$

Dacă $a = -1$, atunci din (2) rezultă $f(0) = a = -2a \Leftrightarrow a = 0$, contradicţie. Deci, $a \neq -1$.

Notăm $x=\frac{t}{a+1}$ şi obţinem $f(t)=\frac{2a}{a+1}\cdot t$, adică $f(t) = ct$, $c \in \mathbf{R}$.

Dacă punem în (1) obţinem

$$(c^2 + c - 2)xy = 0,\ (x, y \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1, \\ c=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=x,\ x\in\mathrm{R}, \\ f(x)=-2x,\ x\in\mathrm{R}. \end{array}\right.$$

Verificarea arată că ambele funcţii satisfac egalitatea (1).

Barem. 1. Existenţa numărului a pentru care $f(a) = 1$ .... 1 p.

2. Obţinerea relaţiei $f(xa+x)=2ax$ .... 1 p.

3. Demonstrarea $a \neq -1$ .... 1 p.

4. Obţinerea $f(x) = cx$ .... 2 p.

5. Obţinerea valorilor c ($c = 1$, $c = -2$) .... 1 p.

6. Verificarea sa argumentarea că f este surjectivă .... 1 p.

B11. Fie *ABC* un triunghi cu unghiul ascuţit *A*. În interiorul triunghiului *ABC* se ia un punct *P* astfel încât m($\angle BAP$) = m($\angle ACP$) şi m($\angle CAP$) = m($\angle ABP$). Fie *M* şi *N* centrele cercurilor înscrise în triunghiul *ABP* şi, respectiv, triunghiul A*CP*, iar *R* raza cercului circumscris triunghiului *AMN*. Să se arate că

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

B11. Дан треугольник *ABC* с острым углом *A*. Внутри треугольника *ABC* берется точка *P* такая, что m($\angle BAP$) = m($\angle ACP$) и m($\angle CAP$) = m($\angle ABP$). Пусть *M* и *N* – центры окружностей, вписанных в треугольник *ABP* и, соответственно, в треугольник *ACP*, а *R* – радиус окружности, описанной около треугольника *AMN*. Показать, что

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}.$$

Soluţie. Fie $PM \cap AB = \{E\}$ şi $PN \cap AC = \{F\}$. Din asemănarea triunghiurilor *APB* şi *CPA* (UU) rezultă că m($\angle APB$) = m($\angle APC$), şi, deci,

$$m(\angle APE) = m(\angle APF), \qquad (1)$$

$$m(\angle EPF) = \frac{1}{2}\,[m(\angle APB) + m(\angle APC)] = 180^{o} - m(\angle EAF) = 180^{o} - m(\angle BAC).$$

Deci, patrulaterul *AEPF* este inscriptibil şi m($\angle APE$) = m($\angle AFE$) = m($\angle APF$) = m($\angle AEF$) şi din (1) rezultă *AE* = *EF*.

În triunghiurile *AEP* şi *AFP* segmentele *AM* şi *AN* sunt bisectoare, deci,

$$\frac{PM}{EM}=\frac{AP}{AE}=\frac{AP}{AF}=\frac{PN}{NF}.$$

Conform reciprocei teoremei lui Thales, *MN* || *EF*. Cum triunghiul *AEF* este isoscel cu *AE* = *AF* rezultă că $EF = 2\cdot AE\cdot \sin\frac{A}{2}$. Din asemănarea triunghiurilor *MPN* şi *EPF* avem $\frac{MN}{EF}=\frac{PM}{PE}$. Deci,

$$MN = EF\cdot\frac{PM}{PE} = EF\cdot\frac{AP}{AP+AE} = 2\cdot\frac{AE\cdot AP}{AP+AE}\cdot\sin\frac{A}{2}.$$

Conform teoremei sinusurilor, din triunghiul *AMN* rezultă

$$\frac{1}{R}=2\cdot\frac{\sin(\angle MAN)}{MN}=\frac{2}{MN}\cdot\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AE}. \qquad (2)$$

Din asemănarea ΔAPB ~ ΔCPA avem $AB\cdot AP = AC\cdot BP$ şi $AB\cdot CP = AC\cdot AP$. Dar *PE* şi *DF* sunt bisectoare în triunghiul *APB* şi, respectiv, în triunghiul *APF*. Rezultă că

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AP}{PB} \text{ şi } \frac{AF}{FC}=\frac{AP}{PC} \;\Rightarrow\; \frac{AE}{AB}=\frac{AP}{AP+PB} \text{ şi } \frac{AF}{AC}=\frac{AP}{AP+PC} \;\Rightarrow$$

$$AE=\frac{AB\cdot AP}{AP+PB}=AF=\frac{AC\cdot AP}{AP+PC} \;\Rightarrow$$

$$\frac{1}{AE}=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{AP+PB}{AB\cdot AP}+\frac{AP+PC}{AC\cdot AP}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{PB}{AB\cdot AP}+\frac{CP}{AC\cdot AP}\right]=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC},$$

deoarece $\frac{AP}{CP}=\frac{AB}{AC}=\frac{PB}{PA}$. Din (2) rezultă că $\frac{1}{R}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}+\frac{1}{AP}$.

Barem. 1. Demonstraţia că *AE* = *AF* ($PM \cap AB = \{E\}$, $PN \cap AC = \{F\}$) ....1 p.

2. Demonstraţia $MN \parallel EF$ ....1 p.

3. $\frac{1}{R}=\frac{2}{MN}\cdot\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{AP}+\frac{1}{AE}$ ....2 p.

4. $AE=\frac{AB\cdot AP}{AP+PB}=AF=\frac{AC\cdot AP}{AP+PC}$, $\frac{1}{AE}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}$, finalizarea ....1 p.

B12. De-a lungul cercului sunt scrise n ($n \geq 1$) numere reale, a căror sumă este egală cu $n - 1$. Să se arate că aceste numere oricând pot fi notate consecutiv cu x_1, x_2, ..., x_n , începând de la o poziţie oarecare în sensul mişcării acelor ceasornicului, astfel încât $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k - 1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$.

B12. По окружности написаны n ($n \geq 1$) действительных чисел, сумма которых равна $n - 1$. Показать, что эти числа всегда можно обозначить последовательно через x_1, x_2, ..., x_n, начиная с некоторой позиции по часовой стрелке, так, чтобы $x_1 + x_2 + ... + x_k \geq k - 1$ при любом $1 \leq k \leq n$.

Soluţie. Înlocuim toate numerele x cu numerele respective y=1 – x. Suma numerelor noi este

$$\sum_y y = \sum_x (1 - x) = n - \sum_x x = n - (n-1) = 1.$$

Condiţia cerută

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \geq k - 1, \quad k = 1, ..., n, \qquad (1)$$

este echivalentă cu

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \geq \sum_{i=1}^{k} (1 - x_i) = k - \sum_{i=1}^{k} x_i \leq k - (k-1) = 1, \quad k = 1, ..., n,$$

adică

$$\sum_{i=1}^{k} y_i \leq 1, \qquad k = 1, ..., n. \qquad (2)$$

Vom demonstra prin inducţie după n că se poate nota în mod consecutiv numerele noi de la o poziţie oarecare în sensul mişcării acelor ceasornicului de-a lungul cercului cu y_1, y_2, ..., y_n astfel încât să aibă loc (2).

Pentru $n = 1$ afirmaţia este evidentă.

Presupunem că ea este adevărată pentru orice m numere, suma cărora este egală cu 1. Fie date $m + 1$ numere, suma cărora este egală cu 1. Rezultă că printre ele există cel puţin un număr pozitiv. Notăm acest număr cu α şi vecinul său (în sensul opus mişcării acelor ceasornicului) cu β. Înlocuim numerele α şi β cu un singur număr α + β. Obţinem m numere, suma cărora este egală cu 1. Conform presupunerii inductive, putem să notăm aceste m numere cu y_1, y_2, ..., y_m, pentru care are loc (2) cu $n = m$. Presupunem că numărul marcat α + β are numărul de ordine p. Atunci revenim de la numărul α + β la numerele α şi β, notând pe nou $y_p = \beta$, $y_{p+1} = \alpha$, iar la următoarele numere consecutive mărim numărul de ordine cu 1. La primele $p - 1$ numere păstrăm intact numărul de ordine. Evident, condiţia (2) este adevărată pentru $k = 1, 2, ..., p - 1, p + 1, ..., m + 1$. Deoarece (2) este adevărată pentru $k = p + 1$, iar $y_{p+1} = \alpha > 0$, rezultă că (2) este adevărată şi pentru $k = p$. Astfel, (2) şi (1) sunt adevărate pentru orice $k = 1, ..., n$.

Barem. 1. Iniţializarea inducţiei, folosind o metodă care duce la soluţie ....1 p.
2. Pasul inducţiei:
a) selectarea unui punct special a_m (maximal, ≤ 1), combinarea a două puncte în unul pentru
a reduce la cazul $n - 1$ ....1 p.
b) observaţia că inegalităţile care rezultă din cazul $n - 1$ se verifică şi pentru $k < m$ şi $k > m$ ……..…..1 p.
c) demonstraţia inegaţităţii pentru $k = m$ ………………………………………………………………4 p.