A 58-a OLIMPIADĂ DE MATEMATICĂ A REPUBLICII MOLDOVA

Chişinău, 29 martie 2014

A doua probă de baraj pentru Olimpiada Balcanică de Matematică 2014

şi Olimpiada Internaţională de Matematică 2014

Soluții, barem

B5. Fie n ($n \ge 2$) numere pozitive $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, suma cărora este $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Să se arate că dacă $x_n \le \frac{2}{3}$, atunci există k ($1 \le k \le n$), astfel încât $\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 + ... + x_k < \frac{2}{3}$.

B5. Даны n ($n \ge 2$) положительных чисел $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, сумма которых равна $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Показать, что, если $x_n \le \frac{2}{3}$, то существует k ($1 \le k \le n$) такое, что $\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 + ... + x_k < \frac{2}{3}$.

Soluţie. Avem 2 cazuri.

1) Dacă $x_n > \frac{1}{3}$, atunci $\frac{1}{3} \le 1 - x_n < \frac{2}{3}$. Ca urmare, pentru $k = n - 1$ obţinem

$$\frac{1}{3} \le x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} = 1 - x_n < \frac{2}{3}.$$

2) Dacă $x_n \le \frac{1}{3}$, atunci notăm $s_k = x_1 + x_2 + ... + x_k$, $s_0 = 0$.

Dacă există k astfel încât $\frac{1}{3} \le s_k < \frac{2}{3}$, atunci obţinem inegalităţile cerute.

În caz contrar, din relaţiile

$$0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = 1 \text{ şi } s_{n-1} = 1 - x_n \ge \frac{2}{3},$$

rezultă că putem alege cel mai mic număr natural k astfel încât $s_k \ge \frac{2}{3}$. Din presupunerea anterioară ar rezulta că $s_{k-1} < \frac{1}{3}$. De aici obţinem că

$$x_k = s_k - s_{k-1} > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \ge x_n,$$

contradicţie.

Barem. 1. Studierea completă a cazului $x_n > \frac{1}{3}$ .... 2 p.

(pentru obţinerea doar a unei inegalităţi – cel mult 1 p.)

2. Studierea cazului $x_n \le \frac{1}{3}$.

a) studierea $s_k = x_1 + x_2 + ... + x_k$, $s_0 = 0$ ....1 p.

b) scrierea corectă a afirmaţiei contrare pentru reducerea la contradicţie ....1 p.

c) alegerea celui mai mic k astfel încât $s_{k-1} < \frac{1}{3}$ şi $s_k \ge \frac{2}{3}$ ....2 p.

d) reducerea la contradicţie ....1 p.

B6. Numerele pozitive a, b şi c verifică egalitatea $abc = 1$. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a expresiei

$$E(a,b,c)=\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}.$$

B6. Положительные числа a, b и c удовлетворяют равенству $abc = 1$. Определить наименьшее возможное значение выражения

$$E(a,b,c)=\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}+\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}+\frac{c^3+5}{c^3(a+b)}.$$

Soluţie. Notăm $x = bc$, $y = ca$, $z = ab$, deci, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ şi $xyz = 1$. Din inegalitatea mediilor obţinem următoarele

$$a^3+1+1\geq 3\sqrt[3]{a^3\cdot 1\cdot 1}\Rightarrow a^3+2\geq 3a\Rightarrow$$

$$\frac{a^3+5}{a^3(b+c)}=\frac{a^3+2}{a^3(b+c)}+\frac{3}{a^3(b+c)}\geq\frac{3a}{a^3(b+c)}+\frac{3}{a^3(b+c)}=\frac{3a^2bc}{a^3(b+c)}+\frac{3a^2b^2c^2}{a^3(b+c)}=\frac{3(x+x^2)}{y+z}.$$

Analog,

$$\frac{b^3+5}{b^3(c+a)}\geq\frac{3(y+y^2)}{z+x},\quad \frac{c^3+5}{c^3(a+b)}\geq\frac{3(z+z^2)}{x+y}.$$

Adunăm parte cu parte şi obţinem

$$E(a,b,c)\geq 3\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}+\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right). \tag{1}$$

Conform inegalităţii Nesht

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2},$$

iar

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)}=\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3\sqrt[3]{xyz}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Deci, $E(a, b, c) \geq 9$. Din $E(1, 1, 1) = 9$ rezultă că cea mai mică valoare posibilă a lui E, în condiţiile problemei, este 9.

Barem. 1. Demonstrarea inegalităţii $\sum\frac{1}{a^3(b+c)}\geq\frac{1}{2}\cdot\sum ab$ .... 2 p.

2. Scrierea $\frac{5}{2}\cdot\sum ab=2\sum ab+\frac{1}{4}\cdot\sum a(b+c)$ ....2 p.

3. Demonstrarea $\sum\frac{1}{b+c}+\frac{1}{4}\cdot\sum a(b+c)\geq\sum\sqrt{a}$ ....1 p.

4. $E(a,b,c)\geq\sum\sqrt{a}+2\sum ab\geq 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}}+6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=9$ ....2 p.

Notă. Pentru răspuns corect – 1 p.

Pentru tentativă de a demonstra (CBS, şiruri ordonate) – cel mult 1 p.

B7. Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Bisectoarele unghiurilor BAD şi BCD se intersectează în punctul K de pe diagonala BD. Fie M mijlocul diagonalei BD. O dreaptă, care trece prin vârful C paralel cu dreapta AD, intersectează dreapta AM în punctul P. Să se demonstreze că triunghiul DPC este isoscel.

B7. Дан вписанный в окружность четырехугольник $ABCD$. Биссектриссы углов BAD и BCD пересекаются в точке K на диагонали BD. Пусть M середина диагонали BD. Прямая, которая проходит через точку C параллельно прямой AD, пересекает прямую AM в точке P. Докажите, что треугольник DPC равнобедренный.

Soluţie. Segmentele AK şi CK sunt bisectoarele interioare ale triunghiurilor BAD şi, respectiv, CBD. Conform teoremei bisectoarei avem

$$\frac{BK}{KD}=\frac{BC}{CD}=\frac{BA}{DA} \Rightarrow AB\cdot CD=BC\cdot AD \qquad (1)$$

Deoarece patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil, conform teoremei Ptolomeu are loc relaţia

$$BD\cdot AC=BC\cdot DA+AB\cdot CD. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) avem $BD\cdot AC = 2AB\cdot CD = 2BC\cdot DA = 2BM\cdot AC = 2DM\cdot AC$. Din $\frac{AB}{BM}=\frac{AC}{CD}$ şi m($\angle ABM$) = m($\angle ABD$) = m($\angle ACD$), de unde rezultă $\Delta ABM \sim \Delta ACD$. Rezultă m($\angle AMB$) = m($\angle ADC$). Din $BM\cdot AC = BC\cdot DA$ şi m($\angle MBC$) = m($\angle DBC$) = m($\angle DAC$), de unde rezultă $\Delta CBM \sim \Delta CAD$. Rezultă m($\angle CMB$) = m($\angle CDA$).

În continuare vom finaliza demonstraţia, cercetând două cazuri.

1) Dreapta AP separă punctele C şi D.

Din $CP \parallel AD \Rightarrow$ m($\angle PCD$) = m($\angle CDA$) = m($\angle ADC$) = m($\angle AMB$) = m($\angle PMD$). Rezultă că patrulaterul $CMDP$ este inscriptibil $\Rightarrow$ m($\angle CPD$) = m($\angle CMB$) = m($\angle CDA$) = m($\angle PCD$) $\Rightarrow$ ΔPCD este isoscel.

2) Dreapta AP nu separă punctele C şi D. Din $CP \parallel AD \Rightarrow$ m($\angle PCD$) + m($\angle CDA$) = 180^o $\Rightarrow$ m($\angle PCD$) + m($\angle AMB$) = 180^o $\Rightarrow$ m($\angle PCD$) + m($\angle PMD$) = 180^o $\Rightarrow$ patrulaterul $PMCD$ este inscriptibil $\Rightarrow$ m($\angle CPD$) = m($\angle CMD$) = 180^o – m($\angle CMB$) = 180^o – m($\angle CDA$) = m($\angle PCD$). Deci, triunghiul PCD este isoscel.

Barem. 1. $AB\cdot CD=BC\cdot AD$ .... 1 p.
2. $BD\cdot AC=BC\cdot DA+AB\cdot CD$ ....1 p.
3. $BD\cdot AC = 2BC\cdot DA$ ....1 p.
4. m($\angle AMB$) = m($\angle ADC$) ....1 p.
5. $\Delta CBM \sim \Delta CAD$ ....1 p.
6. m($\angle PCD$) = m($\angle CDA$) ....1 p.
7. Cazul dreapta AP nu separă punctele C şi D ....1 p.

B8. Fie n ($n \geq 2$) puncte distincte $A_1, A_2, ..., A_n$ în plan. Mijloacele tuturor segmentelor cu extremităţile în oricare două dintre aceste puncte sunt colorate în roşu. Care este cel mai mic număr posibil de puncte roşii obţinute în acest mod?

B8. Даны n ($n \geq 2$) различных точек $A_1, A_2, ..., A_n$ на плоскости. Середины всех отрезков с концами в любых двух из этих точек закрашены в красный цвет. Чему равно наименьшее возможное количество красных точек, полученных таким образом?

Soluţie. 1) Pentru orice mulţime de k puncte distincte $B = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ notăm cu $M(B)$ mulţimea tuturor punctelor roşii respective (mulţimea mijloacelor tuturor segmentelor B_iB_j), iar prin $r(B) = |M(B)|$ cardinalul acestei mulţimi.

Fie dată o mulţime de n puncte distincte $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Putem alege o dreaptă l, care nu este paralelă nici cu o dreaptă A_iA_j (deoarece numărul dreptelor A_iA_j este finit), apoi o dreaptă d, care este perpendiculară pe l.

Proiectăm (ortogonal) punctele din $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ pe dreapta d şi obţinem n puncte distincte şi coliniare $A' = \{A'_1, A'_2, ..., A'_n\}$. Proiecţiile punctelor roşii $M(A)$ concid cu punctele roşii $M(A')$ şi $r(A) \geq r(A')$ (punctele roşii pentru mulţimea A' nu sunt mai multe decât punctele roşii pentru mulţimea A).

Deci, pentru a găsi numărul minimal posibil de puncte roşii este suficient să studiem mulţimi de puncte coliniare $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$.

Vom demonstra prin inducţie că pentru n puncte coliniare avem $r(A) \geq 2n - 3$ pentru $n \geq 2$.

Pentru $n = 2$ mulţimea $A = \{A_1, A_2\}$ are un punct roşu şi $r(A) = 2\times2 - 3 = 1$ este adevărat.

Presupunem că pentru orice k puncte coliniare $A = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ avem $r(A) \geq 2k - 3$. Luăm o mulţime din $k + 1$ puncte coliniare $A = \{A_1, A_2, ..., A_{k+1}\}$ şi alegem dintre ele un punct situat la o margine a mulţimii (pe dreaptă), fie A_{k+1}. Atunci, conform presupunerii inductive, pentu mulţimea $A^* = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ mulţimea punctelor roşii $M(A^*)$ are cardinalul $r(A^*) \geq 2n - 3$. Datorită alegerii punctului A_{k+1}, mijloacele segmentelor care unesc acest punct cu două cele mai apopiate puncte din A^* pe dreaptă sunt printre punctele roşii ale mulţimii $M(A)$, dar nu sunt printre punctele roşii ale mulţimii $M(A^*)$. Astfel, $r(A) \geq r(A^*) \geq 2n - 3 + 2 = 2(n + 1) - 3$. Deci, formula $r(A) \geq 2n - 3$ este adevărată pentru orice $n \geq 2$.

Valoarea $r(A) \geq 2n - 3$ se realizează în modul următor. Luam n puncte pe axa reală $A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ pentru $n \geq 2$ cu coordonatele $\{0, 1, 2, ..., n - 1\}$. Punctele roşii $M(A)$ au coordonatele de forma $(i+j)/2$, adică $s/2$, unde $1 = 0 + 1 \leq s \leq (n - 1) + (n - 2) = 2n - 3$. Pentru această mulţime avem $r(A) = 2n - 3$.

Deci, numărul minim posibil al punctelor roşii pentru orice mulţime de n puncte distincte în plan este $2n - 3$.

Barem. 1. Considerarea mulţimii A' ……………………………………………………………1 p.
2. $r(A) \geq r(A')$ ……………………………………………………………………………..1 p.
3. Demonstraţia relaţiei $r(A) \geq 2n - 3$, $n \geq 2$ ………………………………………………….2 p..
4. Realizarea $r(A) = 2n - 3$ ……………………………………………………………2 p.
Notă. Examinarea cu demonstraţie a cazurilor particulare – cel mult 1 p.