A 58-a Olimpiadă de matematică a Republicii Moldova
Barajul I de selecţie pentru OBM şi OIM, 3 martie 2014

2014/B1. Să se determine toate perechile de numere naturale (x, y) care satisfac ecuaţia $\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + 2 = 0$.

2014/B2. Numerele reale pozitive a şi b satisfac relaţia $a + b = 1$. Să se determine cea mai mică valoare posibilă a expresiei $E(a, b) = 3\sqrt{1 + 2a^2} + 2\sqrt{40 + 9b^2}$.

2014/B3. În triunghiul ascuţitunghic ABC, punctul $D \in (BC)$ este piciorul bisectoarei interioare din A, iar punctele E şi F sunt proiecţiile ortogonale ale punctului D pe dreptele AB şi AC, respectiv. Dreptele CE şi BF se intersectează în punctul K, iar BF mai taie cercul circumscris triunghiului AEK în punctul L, diferit de K. Să se demonstreze că $BF \perp DL$.

2014/B4. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, fie $p(n)$ produsul tuturor cifrelor nenule ale numărului n (dacă n are o singură cifră atunci $p(n) = n$). Să se determine cel mai mare divizor prim al numărului $p(1) + p(2) + ... + p(999)$.

Soluţii

2014/B1. Avem $\sqrt{x+y}+2=\sqrt{x}+\sqrt{y} \Rightarrow x+y+4\sqrt{x+4}+4=x+y+2\sqrt{xy} \Rightarrow 2\sqrt{x+y}+2=\sqrt{xy} \Rightarrow 4(x+y)+8\sqrt{x+y}+4=xy$. Rezultă că $8\sqrt{x+y}\in\mathbb{Z}$, de unde $\sqrt{x+y}\in\mathbb{Z}$ şi deci, $\sqrt{xy}$ este par. Atunci $\sqrt{xy}=2a, a\in\mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{x+y}=a-1 \Rightarrow x+y=(a-1)^2$. Rezultă că $x,y\in\mathbb{N}$ sunt soluţiile ecuaţiei pătratice $t^2-(a-1)^2t+4a^2=0$. Atunci $\Delta=(a-1)^4-16a^2=(a+1)^2(a^2-6a+1)$ trebuie să fie pătrat perfect, de unde obţinem că $a^2-6a+1=b^2, b\in\mathbb{N} \Rightarrow (a-3-b)(a-3+b)=8$. Dar $a-3+b>a-3-b$ şi ambele au aceeaşi paritate, de unde obţinem $a-3+b=4, a-3-b=2 \Rightarrow a=6, b=1$ şi atunci x,y sunt soluţiile ecuaţiei $t^2-25t+144=0$, adică $(x,y)\in\{(16,9),(9,16)\}$.

2014/B2. Reamintim *inegalitatea lui Minkowski*: Dacă $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{R}$ atunci

$$\sqrt{(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2}\leq\sqrt{a^2+b^2+c^2}+\sqrt{d^2+e^2+f^2}$$

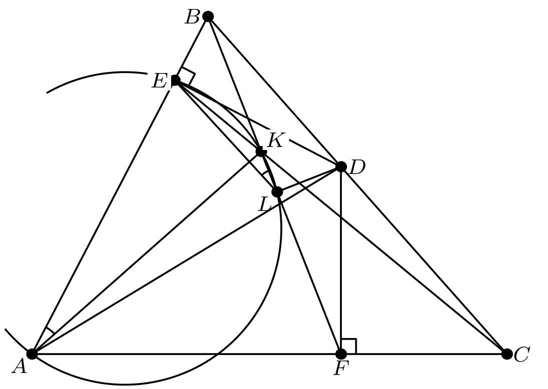
(care nu este altceva decît inegalitatea triunghiului pentru vectori în spaţiul Euclidean 3-dimensional). Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}>0$. Atunci

$$E(x,y)=\sqrt{9+9x^2+9x^2}+\sqrt{144+16+36y^2}\geq\sqrt{15^2+(3x+4)^2+(3x+6y)^2}$$

$$\geq\sqrt{225+\frac{1}{2}(3x+4+3x+6y)^2}=\sqrt{225+\frac{1}{2}(6+4)^2}=\sqrt{275}=5\sqrt{11}.$$

Egalitatea are loc cînd $\frac{3x}{4}=\frac{3x}{6y}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}, y=\frac{2}{3}$. Se verifică că $E(\frac{1}{3},\frac{2}{3})=5\sqrt{11}$.

2014/B3.



2014/B3

Este suficient să arătăm că patrulaterul $BELD$ este inscriptibil, adică să arătăm că $\angle ELB=\angle EDB=90^\circ-\angle B$. Observăm că patrulaterul $AEKL$ este inscriptibil, deci $\angle ELK=\angle EAK$. Astfel, trebuie să arătăm că $\angle EAK=90^\circ-\angle B$, adică faptul că AK este înălţimea din A în triunghiul $\triangle ABC$. Fie $H = AK \cap BC$. Conform teoremei lui Ceva, avem

$$\frac{BH}{HC} = \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AF}{FC} \tag{1}$$

Cum AD este bisectoarea unghiului $\angle A$, avem $AE = AF$ şi $DE = DF$. Prin urmare, partea dreaptă a relaţiei (1) este egală cu

$$\frac{BE}{FC} = \frac{DE/\tan B}{DF/\tan C} = \frac{\tan C}{\tan B}.$$

Prin urmare, $\frac{BH}{HC} = \frac{\tan C}{\tan B}$, relaţie ce arată că AH este înălţime în triunghiul ABC, ceea ce trebuia demonstrat.

2014/B4. Facem convenţia $p(0) = 1$. Atunci $p(\overline{abc}) = p(a)p(b)p(c)$ (inclusiv pentru cazurile cînd unele din cifrele a, b, c sunt 0). Atunci

$$\sum_{k=0}^{999} p(k) = \sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9}\sum_{c=0}^{9} p(\overline{abc}) = \sum_{a=0}^{9}\sum_{b=0}^{9}\sum_{c=0}^{9} p(a)p(b)p(c) = (p(0) + p(1) + ... + p(9))^3$$

$$= (1 + (1 + 2 + ...9))^3 = 46^3$$

Prin urmare, $p(1) + p(2) + ... + p(999) = 46^3 - 1 = 97335 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 103$. Răspunsul problemei este 103.